數學傳播 36卷1期, pp. 16-36

關於 Euler 級數的幾個觀點

林琦焜

§1 類比與猜想

『假如有人能夠求出這個級數 $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots$ 我們直到現在還未能求出的和並能把它通知我們, 我們將會非常感謝他。』

— Jacob Bernoulli, 1654 – 1705 —

這篇文章主要是告訴讀者 L. Euler (1707–1783) 當初是如何求得所有自然數平方之倒數的和這個級數的精確值。基本上他的想法就是類比加上猜想, 這是現代學生所缺少的素養。類比(analogy) 源自於希臘文analogia, 原文的意義就是比例(proportion)。或者說得更白話就是某種類型的相似性, 古人所言舉一反三 大概就是這個意思。所有偉大的數學家 (科學家) 都是類比法的高手, Euler則是其中之翹楚。有了類比就可以做出合適的猜想, 要成為一個好的數學家, 你必須首先是一個好的猜想家。

『沒有偉大的猜想, 就做不出偉大的發現。』

— 牛頓, 1643 – 1727 —

Euler關於這個級數的求和方法非常有創意是一個數學系學生應該具備的常識, 但事與願違。我在求學的階段並不知道這段有趣的歷史, 反而是成為大學教授, 由於教學的緣由, 還有準備高中數學資優生的教材時, 才發覺 Simmons 的微積分 [10]有一些歷史典故及相關數學 (不是只有故事而已!) Euler這個故事帶給我極大的樂趣與啓發, 也因此任何一門課 (每一學期) , 我都花一節課的時間解說 Euler 這個漂亮的成果, 以激發學生對於數學的熱情, 這就是我寫這一篇文章的主要動機。

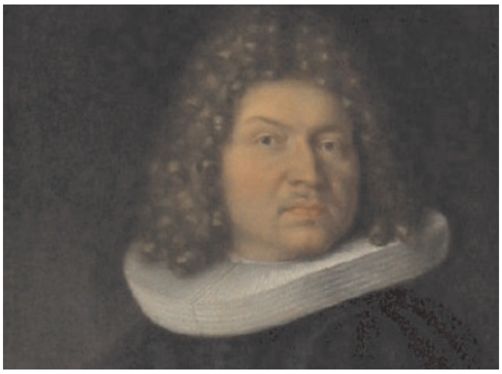

圖1.1　Jacob Bernoulli

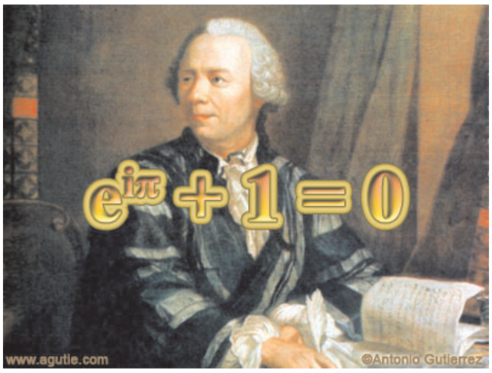

圖1.2　L. Euler

按瑞典數學家 Lars Garding 在其通俗名著《Encounter with Mathematics》中對於級數的評論:『級數只是一個數學工具, 它本身並不構成一個數學的獨立分支。』雖然如此, 但在19世紀與20世紀初, 級數在大學仍然視爲一門專業的科目, 甚至還有發散級數 (divergent series) 這門課。在微積分發展的初期, 牛頓、Leibniz、Bernoulli 兄弟、Euler 等人在做微分 (積分) 時, 通常是將函數表示爲級數, 而後再逐項微分 (積分) 。Euler、Lagrange 甚至相信所有的函數都可以表示爲無窮級數, 在數學的發展史, 甚至有一段時間爲了怎樣的函數才可以表示爲無窮 (三角) 級數而開啓了從 D. Bernoulli、d'Alembert 一直到 Fourier 的《函數百年論戰》。

古希臘大哲學家亞里斯多得就已經會用等比級數。中古世紀著名的哲學家 Nicole Oresme (或 Nicolas d'Oresme; 1320(5)–1382) 是歷史上第一個證明調和級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots \tag{1.1}$$

是發散級數, 他的想法是等比級數

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots\\
&\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots\\
&=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots
\end{aligned} \tag{1.2}$$

最後的級數有無窮多個 $1/2$, 所以發散, 因此原調和級數 (1.1) 發散。既然想法是等比級數就是沒有限定是 $1/2^n$, 我們也可以考慮 $1/3^n$

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{27}\right)+\cdots$$

$$\begin{aligned}
&\geq 1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{27}\right)+\cdots\\
&=1+\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{18}{27}+\cdots=1+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\cdots
\end{aligned}\tag{1.3}$$

依此類推, 可以考慮 $1/4^n$、$1/5^n\cdots$, 所以有無窮多種證明方法, 你唯一要掌握的是等比級數。其實這方法就是比較審驗法: 要判別一個級數收斂或發散只需要與另一個已知的級數 (通常是等比級數) 做比較。我們回到 Euler 的級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots\tag{1.4}$$

在我們的內心深處始終有一個等比級數, 仿 (1.2)

$$\begin{aligned}
&1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{7^2}\right)+\left(\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{15^2}\right)+\cdots\\
&\quad\leq 1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^2}\right)+\left(\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{8^2}\right)+\cdots\\
&\quad=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=2
\end{aligned}\tag{1.5}$$

讀者應該觀察到 (1.5) 與 (1.2) 的分割方式並不一樣, 在 (1.5) 我們挑選的等比級數 $1/2^n$是領頭羊, 但 (1.2) 則是殿後, 眞是所謂收斂、發散大不同。同理仿 (1.3) 的想法考慮$1/3^n$

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{8^2}\right)+\left(\frac{1}{9^2}+\cdots+\frac{1}{26^2}\right)+\cdots\\
&\quad\leq(1+1)+\left(\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{9^2}+\cdots+\frac{1}{9^2}\right)+\cdots\\
&\quad=2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right)=3
\end{aligned}\tag{1.6}$$

所以級數 (1.4) 的分割方式也是有無限多種, 但是事實上是同一種等比級數的方法。

證明級數收斂發散是一回事 (方法多的讓人眼花撩亂), 要求得收斂級數之精確值則是另一回事, 只有少數的級數才有精確值, 但這些卻構成這個理論最美妙的一部份。Euler 這個成果可以視爲解析數論誕生的標記, 這個成果除了本身的美之外, 更重要的是刺激了其他數學的發展。

分析或數學分析是一個相當難定義的概念, 牛頓將分析理解爲藉助於無窮級數來研究方程式, 換言之, 牛頓的基本發現歸結爲:一切都應當展開成無窮級數。他曾說:『有限項能做的, 無限多項也能做, 這種無限多項的做法稱爲 — 分析。』牛頓用分析這個術語表示研究(即藉助無窮級數來研究曲線, 研究運動, 亦即研究我們今天所謂的函數或映射)。分析(analysis) 的原文 (拉丁文) 與解剖學有關, 意思是將一個整體拆解爲各個細部之組合, 因此無窮級數是分析的重心。

§2 根與係數的關係

『對於有關級數$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots$ 已經做了如此多的工作, 以至於似乎很難期望有甚麼有關它們的新東西了 .... 我也是, 不管怎樣反復努力只不過在對它們和的近似值方面取得一些成果 .... 但是現在十分出乎意料地, 我發現了關於$\zeta(2)$的一個漂亮公式, 它與圓的面積 (也就是圓周率π)有關。』

— L. Euler, 1707 – 1783 —

在 18 世紀早期 Bernoulli 兄弟解決了調和級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 的發散問題之後, 接著他們想計算級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=? \tag{2.1}$$

的精確值。但顯然這問題是超越了 Bernoulli 兄弟之能力, 但青出於藍更勝藍, 這問題是由 John Bernoulli 門下的弟子 Euler 所解決, 他的方法是奇特的且非常有創意。關於這部份的歷史讀者有興趣可看 ([2,7,9])。我們簡單述說如下: 先看一個二次多項式

$$\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)=1-ax+bx^2$$

其中α_1、α_2爲多項式$1-ax+bx^2$的兩個根, 則由根與係數的關係知 $a=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}$, 依此類推考慮根爲$\pm1$、$\pm2$、$\cdots$、$\pm n$ 的$2n$次多項式

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right)\\&=1-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)x^2+\cdots\end{aligned}$$

因此由類比法想得到 (2.1) 的精確值相當於找一個函數它的根落在 ±1、±2、$\cdots$、$\pm n$、$\cdots$, 按照我們對函數的瞭解最合適的候選者是正弦函數$\sin x$, 所以將問題改一下: 找一個函數它的根落在 $\pm\pi$、$\pm2\pi$、$\cdots$、$\pm n\pi$、$\cdots$。

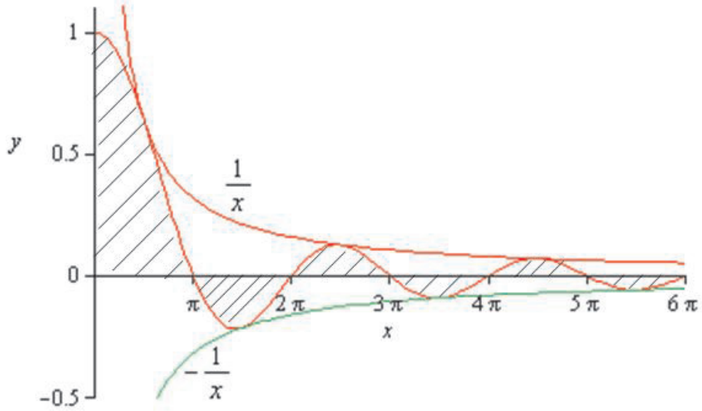

圖2.1　$\frac{\sin x}{x}$

但是$\sin 0 = 0$, 所以由因式定理可以合理假設

$$\frac{\sin x}{x} = C\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots$$

令 $x=0$ 得 $C=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \\ &= 1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)x^2+\cdots \qquad (2.2)\end{aligned}$$

另一方面由$\sin x$的 Taylor 級數得

$$\frac{\sin x}{x} = 1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\cdots$$

比較係數得

$$\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+\cdots\cdots=\frac{1}{6}$$

故可以結論。

定理2.1. (Euler)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6} \qquad (2.3)$$

函數 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 是一個特別重要的函數, 探討 Fourier 級數的收斂性時自然而然出現, 這個函數是典型的 Riemann 可積 (瑕積分) 卻不是 Lebesgue 可積 (瑕積分)。

系2.2. (Euler)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{\pi^2}{24}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$

證明: (a) 利用 Euler 的公式 (2.3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$$

(b) 由 Euler 的結果 (2.3), 把級數分爲偶數與奇數兩部份並利用 (a) 的結果

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \square$$

Euler 的方法並沒有限制在平方和, 如果

$$1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots = (1+\alpha_1 z)(1+\alpha_2 z)(1+\alpha_3 z)\cdots \tag{2.4}$$

令各次方的和依次爲

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots \\ S_2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \cdots \\ S_3 &= \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \alpha_4^3 + \cdots \end{aligned} \tag{2.5}$$

經由比較係數後, 可得下列等式

$$\begin{aligned} S_1 &= A_1 \\ S_2 &= A_1 S_1 - 2A_2 \\ S_3 &= A_1 S_2 - A_2 S_1 + 3A_3 \\ S_4 &= A_1 S_3 - A_2 S_2 + A_3 S_1 - 4A_4 \end{aligned} \tag{2.6}$$

利用這些關係可求得底下級數的和。

定理2.3. (Euler)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}=\frac{2^2\cdot\pi^2}{2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{6}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}=\frac{2^4\cdot\pi^4}{2\cdot 4!}\cdot\frac{1}{30}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945}=\frac{2^6\cdot\pi^6}{2\cdot 6!}\cdot\frac{1}{42}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\cdots=\frac{\pi^8}{9450}=\frac{2^8\cdot\pi^8}{2\cdot 8!}\cdot\frac{1}{30}$。

證明: 我們留給讀者練習。

註解:

(1) 特別值得一提的是平方和則對應的是π^2, 四次方和則是π^4其餘依此類推。例如 Euler 還曾算到26次方 (其耐性是何等之大!)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{26}}=1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\cdots=\frac{1315862}{11094481976030578125}\pi^{26} \tag{2.7}$$

(2) 以 Euler 的方法可求得上面這些無窮級數的和基本上都是偶次方, 如果是奇次方是否具有底下之形式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k+1}}=C\times\pi^{2k+1}(???),\qquad C=\text{常數}$$

則仍是未解的問題, 與這相關的領域則是著名的Riemann zeta 函數。

定義 2.5. Riemann ζ-函數定義爲

$$\zeta(s)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\qquad \mathrm{Re}(s)>1 \tag{2.8}$$

Euler還研究了ζ-函數的函數方程, 但這些成果卻徹底被遺忘了, 直到1859年德國數學家 B. Riemann (1826–1866) 因爲研究質數的分佈才復活了這個課題。其中最著名的 Riemann 猜想:Riemann ζ-函數 $\zeta(s)$的零根之實部均爲1/2, 至今仍是未解的懸案。

圖2.2 B. Riemann

§3 無窮乘積 (因式分解)

Euler 的定理是個漂亮的結果, 但其證明方法還不夠嚴謹, 因爲無窮乘積有收斂的問題, 事實上 Euler 還給了詳細的證明, 其想法是從單位圓開始。

分圓多項式z^n-1 的n個根 $z=e^{\frac{2\pi ik}{n}}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$, 正好表示將單位圓分成 n 等分的 n 個相異點, 例如 $n=7$

$$1,\quad e^{2\pi i/7},\quad e^{-2\pi i/7},\quad e^{4\pi i/7},\quad e^{-4\pi i/7},\quad e^{6\pi i/7},\quad e^{-6\pi i/7},$$

所以可表爲因式分解

$$\begin{aligned} z^7-1 &= (z-1)(z-e^{2\pi i/7})(z-e^{-2\pi i/7}) \\ &\qquad (z-e^{4\pi i/7})(z-e^{-4\pi i/7})(z-e^{6\pi i/7})(z-e^{-6\pi i/7}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

而一般情形則是

定理3.1. (Euler 1748) 若 n 是奇數 則下式成立

$$\begin{aligned} z^n-1 &= (z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}(z-e^{i2\pi k/n})(z-e^{-i2\pi k/n}) \\ &= (z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2-2z\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

如果作一下變數變換, $z\to\frac{z}{a}$, 則上式成爲

$$z^n-a^n=(z-a)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2-2az\cos\frac{2k\pi}{n}+a^2\right)$$

令$z=1+\frac{x}{N}$、$a=1-\frac{x}{N}$, 且取$n=N$, 則

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N-\left(1-\frac{x}{N}\right)^N&=\frac{2x}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(2+\frac{2x^2}{N^2}-2\Big(1-\frac{x^2}{N^2}\Big)\cos\frac{2k\pi}{N}\right)\\&=\frac{2x}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(2\Big(1-\cos\frac{2k\pi}{N}\Big)+\frac{2x^2}{N^2}\Big(1+\cos\frac{2k\pi}{N}\Big)\right)\end{aligned}$$

提出因式 $2(1-\cos\frac{2k\pi}{N})$

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N-\left(1-\frac{x}{N}\right)^N&=\frac{2x}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}2\Big(1-\cos\frac{2k\pi}{N}\Big)\left(1+\frac{x^2}{N^2}\cdot\frac{1+\cos(2k\pi/N)}{1-\cos(2k\pi/N)}\right)\\&=Cx\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(1+\frac{x^2}{N^2}\cdot\frac{1+\cos(2k\pi/N)}{1-\cos(2k\pi/N)}\right)\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中

$$C=\frac{2}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}2\Big(1-\cos\frac{2k\pi}{N}\Big)$$

由於多項式 $(1+\frac{x}{N})^N-(1-\frac{x}{N})^N$ 中 x 之係數等於 2 故由 (3.3) 乘積的部份直接令 $x=0$ 左式則由 L'Hospital 法則可得

$$C=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{x}{N})^N-(1-\frac{x}{N})^N}{x}=2,$$

另外

$$\cos y\approx 1-\frac{y^2}{2},\qquad 0\le y\ll 1$$

所以

$$\frac{x^2}{N^2}\cdot\frac{1+\cos(2k\pi/N)}{1-\cos(2k\pi/N)}\approx\frac{x^2}{N^2}\frac{2}{\frac{1}{2}(\frac{2k\pi}{N})^2}=\frac{x^2}{k^2\pi^2}$$

令 $N\to\infty$ 則由 (3.3) 推得

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\tag{3.4}$$

即

$$\sinh x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \tag{3.5}$$

作一下代換 $x \to ix$, 並由等式 $\sin x = -i\sinh(ix)$ 就可得正弦函數 $\sin x$ 之 (因式) 分解。

定理3.2. (Euler 1748)

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \tag{3.6}$$

另外的疑問是$\sin x$是否有其它的虛根呢? 事實上並沒有, 因此可以確信 (3.6) 是正弦函數 $\sin x$ 的因式分解。Euler 這個定理告訴我們正弦函數 (實際上任意的解析函數) 可以像多項式一樣分解爲各個因式之乘積 (因式分解), 主要差別是$\sin x$有無窮多個根因此是無窮乘積 (infinite product), 所以 Euler 這個結果也爲 19 世紀複變函數論中的 Weierstrass 分解理論做了鋪路的工作。

例題3.3. 由正弦函數的無窮乘積 (3.6) 證明

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

解: 對 (3.6) 兩邊取對數

$$\log\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\log\left|1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|$$

另一方面由 Taylor 展開式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots, \qquad \log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

所以

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{\sin x}{x}\right| &= \log\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\cdots\right)\\ &= \left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\cdots\right)^2+\cdots\end{aligned} \tag{3.7}$$

同理

$$\log\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\log\left|1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{n^4\pi^4}+\cdots\right) \tag{3.8}$$

(3.7)、(3.8) 兩式比較係數

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{2\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{180}, \quad \cdots$$

因此

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}, \quad \cdots \qquad \square$$

註解:

(1) 實際上由 (3.7)、(3.8) 可以得出所有的 $\zeta(2n)$, $n\in\mathbb{N}$。

(2) 如果令 $x=\frac{\pi}{2}$ 則由正弦函數的無窮乘積 (3.6) 可得 Wallis 乘積 (John Wallis; 1616–1703)

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\right)\left(\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\left(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right)\left(\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\right)\left(\frac{10\cdot 10}{9\cdot 11}\right)\cdots \tag{3.9}$$

當然有興趣還可嘗試$x=\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{4}$、$\cdots$等等

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right)\left(\frac{12\cdot 12}{11\cdot 13}\right)\left(\frac{18\cdot 18}{17\cdot 19}\right)\left(\frac{24\cdot 24}{23\cdot 25}\right)\cdots$$
$$\sqrt{2}=\left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\right)\left(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right)\left(\frac{10\cdot 10}{9\cdot 11}\right)\left(\frac{14\cdot 14}{13\cdot 15}\right)\left(\frac{18\cdot 18}{17\cdot 19}\right)\cdots$$

Wallis 乘積可以表示爲

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdots\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$$

這相當於

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}=(-1)^n\binom{-1/2}{n}\approx\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

(3) π 可以透過 Wallis 乘積來表示但是 π 也有其它表現式: 利用倍角公式可得到正弦函數 $\sin x$ 的另一種無窮乘積

$$\frac{\sin x}{x}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{16}\cdots$$
$$\frac{\sinh x}{x}=\cosh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{4}\cosh\frac{x}{8}\cosh\frac{x}{16}\cdots \tag{3.10}$$

令$x = \frac{\pi}{2}$就是 Vieta 公式

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots\cdots \tag{3.11}$$

這是歷史上第一個出現的無窮乘積由 Francois Vieta (1540–1603) 於1579年所發現, 他是考慮單位圓內接正 2^n 邊形之面積的極限。

§4 複變函數論

利用複變函數論中的留數定理可以證明 Euler 的級數和 (2.3)。首先我們利用正弦函數的無窮乘積 (3.6) 得出餘切函數的部份分式展開。

例題 4.1.

$$\pi x\cot\pi x = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{x^2-n^2}, \qquad x \neq \pm n \tag{4.1}$$

如果$|x| < 1$則

$$\pi x\cot\pi x = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(2n)x^{2n} \tag{4.2}$$

解: 對 (3.6) 兩邊取對數

$$\log|\sin x| = \log|x| + \sum_{n=1}^{\infty}\log\left|1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|$$

逐項微分得

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$$

因此

$$x\cot x = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{x^2-n^2\pi^2}$$

再把 x 換爲 πx 可得 (4.1)。如果 $|x| < 1$ 則利用等比級數之概念可推得 (4.2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{x^2}{n^2}}{1-\frac{x^2}{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{n^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}\right)x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)x^{2k} \quad \square$$

註解:

(1) (4.1) 就是餘切函數 $\pi\cot\pi x$ 的部份分式展開

$$\pi\cot\pi x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right) \tag{4.3}$$

所以$\pi\cot\pi x$之極點在$x=n\in\mathbb{Z}$, 且留數 (residue) 都等於 1, 這個現象也提供了利用留數定理 求得級數和之線索。

(2) 利用 $\cos x$ 與 $\sin x$ 的 Taylor 級數可得

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}-\frac{x^7}{4725}-\cdots$$

或

$$\pi x\cot\pi x=1-\frac{\pi^2}{3}x^2-\frac{\pi^4}{45}x^4-\frac{2\pi^6}{945}x^6-\frac{\pi^8}{4725}x^8-\cdots \tag{4.4}$$

比較 (4.2)、(4.4) 兩式可以再次推得

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\quad \zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450},\quad \cdots$$

定理4.2. 已知 $f(z)$ 是複數平面上的半純函數 (meromorphic function), a_1、a_2、$\cdots$、a_m 是 f 的有限個極點 (pole) 而且 $a_i\notin\mathbb{Z}$, 假設 $\lim_{z\to\infty}zf(z)=0$, 則

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}f(n)=-\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}\Big(\pi f(z)\cot\pi z;a_k\Big) \tag{4.5}$$

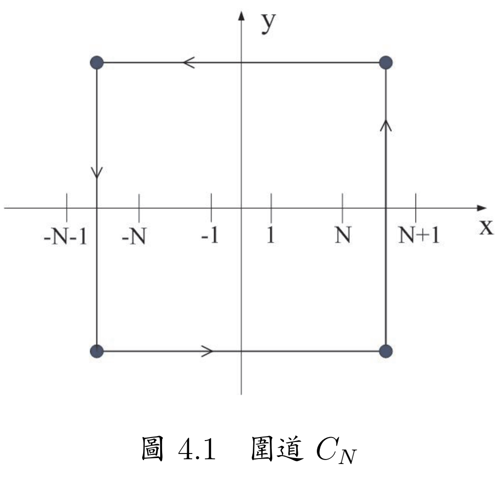

圖 4.1　圍道 C_N

對照(2.3)自然需選取$f(z)=1/z^2$, 所以考慮函數 $\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}$計算得

$$\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}=\frac{\pi\cos\pi z}{z^2\sin\pi z}=\frac{1-\frac{\pi^2z^2}{2!}+\frac{\pi^4z^4}{4!}-\cdots}{z^3(1-\frac{\pi^2z^2}{3!}+\frac{\pi^4z^4}{5!}-\cdots)}$$

$$= \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3} + \cdots\right) \tag{4.6}$$

所以函數 $\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}$ 在 $z=0$ 的留數爲

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{z^2};0\right) = -\frac{\pi^2}{3} \tag{4.7}$$

另外 $\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}$ 在 $z=\pm n, n=\pm1,\pm2,\ldots$ 的留數爲

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{z^2};n\right) &= \lim_{z\to n}(z-n)\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}\\ &= \lim_{z\to n}\frac{\pi(z-n)}{\sin\pi z}\frac{\cos\pi z}{z^2} = \frac{1}{n^2}\end{aligned} \tag{4.8}$$

因此由留數定理推得

$$\oint_{C_N}\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}dz = 2\pi i\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{Res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{z^2};n\right) \tag{4.9}$$

這裡 C_N 是以 $(N+\frac12)(1+i)$、$(N+\frac12)(-1+i)$、$(N+\frac12)(-1-i)$、$(N+\frac12)(1-i)$ 爲四個頂點的正方形圍道, 因爲 $|\cot\pi z|\le M, \forall z\in C_N$

$$\oint_{C_N}\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}dz \approx O(1/z)\to 0 \qquad (N\to\infty)$$

令 $N\to\infty$ 則由 (4.9) 得

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

□

註解:

(1) 如果是一般的函數 $f(z)$ 則 (4.8) 爲

$$\mathrm{Res}(\pi f(z)\cot\pi z;n) = f(n) \tag{4.10}$$

類似上面的推導可以證明 (4.5)。

§5 重積分

由重積分變換積分順序的技巧也可以推得 Euler 的公式 (2.3), 其想法是從等比級數著手。考慮重積分

$$
\begin{aligned}
I=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy&=\int_0^1\int_0^1(1+xy+x^2y^2+\cdots)dxdy\\
&=\int_0^1\Big(x+\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{3}x^3y^2+\cdots\Big)\Big|_0^1dy\\
&=\int_0^1\Big(1+\frac{y}{2}+\frac{y^2}{3}+\cdots\Big)dy\\
&=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

所以

$$I=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy=\zeta(2) \qquad (5.2)$$

這個積分可藉由變數變換來計算。因爲分母有 xy 項, 可以作個旋轉

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

取$\theta=\frac{\pi}{4}$(旋轉 45°) 則

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \qquad (5.3)$$

計算可得

$$xy=\frac{1}{2}(u^2-v^2)\,,\qquad 1-xy=\frac{2-u^2+v^2}{2}$$

所以原積分等於

$$I=4\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}\int_0^u\frac{1}{2-u^2+v^2}dvdu+4\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^{\sqrt2}\int_0^{\sqrt2-u}\frac{1}{2-u^2+v^2}dvdu\equiv I_1+I_2 \qquad (5.4)$$

由積分的技巧

$$
\begin{aligned}
I_1&=4\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}\left[\int_0^u\frac{1}{2-u^2+v^2}dv\right]du\\
&=4\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\tan^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{2-u^2}}\right)\right]_0^u du\\
&=4\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right)du
\end{aligned}
$$

再考慮變數變換

$$u=\sqrt2\sin\theta\,,\quad \sqrt{2-u^2}=\sqrt2\cos\theta\,,\quad du=\sqrt2\cos\theta d\theta$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta}\right)=\theta$$

所以

$$I_1=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}\theta\sqrt{2}\cos\theta d\theta=2\theta^2\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi^2}{18} \tag{5.5}$$

同理

$$\begin{aligned}I_2&=4\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\left[\int_0^{\sqrt{2}-u}\frac{1}{2-u^2+v^2}dv\right]du\\&=4\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\tan^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{2-u^2}}\right)\right]_0^{\sqrt{2}-u}du\\&=4\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right)du\end{aligned}$$

再藉由相同的變數變換

$$\begin{aligned}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right)&=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)\\&=\tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}\right)\\&=\tan^{-1}\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\theta)\cos\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\theta)}{2\cos^2\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\theta)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{aligned}$$

所以

$$I_2=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{2}\cos\theta d\theta=\frac{\pi^2}{9} \tag{5.6}$$

故由 (5.5)、(5.6) 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=I=I_1+I_2=\frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi^2}{9}=\frac{\pi^2}{6} \qquad \square$$

我們再給另一個證明

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{1-xy}-\frac{1}{1+xy}\right)dxdy&=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{2xy}{1-x^2y^2}\right)dxdy\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-XY}dXdY \qquad (X=x^2,Y=y^2)\end{aligned}$$

$$\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{1-xy}+\frac{1}{1+xy}\right)dxdy=2\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-x^2y^2}dxdy$$

兩式相加

$$2\zeta(2) = \frac{1}{2}\zeta(2) + 2\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2}dxdy$$

所以

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= \frac{4}{3}\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2}dxdy\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} \frac{1}{1-(\frac{\sin\theta}{\cos\varphi})^2(\frac{\sin\varphi}{\cos\theta})^2}(1-\tan^2\theta\tan^2\varphi)d\varphi\\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} d\varphi = \frac{\pi^2}{6} \qquad \square\end{aligned}$$

註解:

(1) 值得一提的是相同的技巧可得

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xyz}dxdydz \tag{5.7}$$

但如何求得右式三重積分之精確值仍是未解的問題。另外利用等比級數可以將 $\zeta(3)$ 表示爲雙重積分

$$\zeta(3) = -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}\log xydxdy \tag{5.8}$$

§6 Fourier 級數

利用 Fourier 級數也可以得(2.3)。函數 f 之 Fourier 級數爲

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \qquad x\in(-\pi,\pi) \tag{6.1}$$

其中 Fourier 係數 a_n、b_n 爲

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, & n=0,1,2,3,\ldots\\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, & n=1,2,3,\ldots\end{cases} \tag{6.2}$$

考慮函數 $f(x)=x^2$ 由 (6.2) 得 $b_n=0$ (因爲 x^2 在定義域 $(-\pi,\pi)$ 是偶函數!)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

其次由分部積分可得

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nxdx = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

所以 $f(x)=x^2$ 之 Fourier 級數爲

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \qquad -\pi<x<\pi \tag{6.3}$$

因爲 $f(x)=x^2$ 是分段連續且在端點 $x=\pm\pi$ 也是連續, 因此 $\sim$ 可以改爲等號

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \tag{6.4}$$

令 $x=\pi$ 並利用關係式 $\cos n\pi=(-1)^n$ 得

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$ □

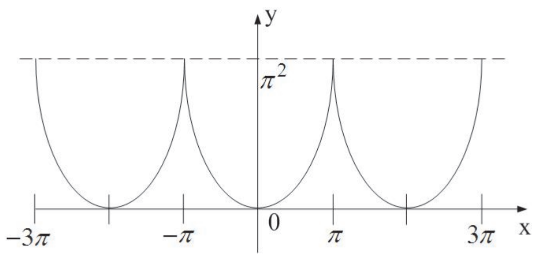

圖5.1 $f(x)=x^2$

註解:

(1) 圓周率π是圓周與直徑之比率, 不具量綱 (不將π視爲長度)、$[n]=[x]=1$, 所以 Fourier 係數a_n、b_n與函數f有相同的量綱

$$[a_n]=\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx\right]=\mathrm{L}^{-0}[f]\mathrm{L}^0=[f]$$
$$[b_n]=\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx\right]=\mathrm{L}^{-0}[f]\mathrm{L}^0=[f]$$

我們考慮 $[-\pi,\pi]$ 或 $[0,2\pi]$ 區間, 這是單位圓周, 本質上已經單位化即無量綱化 (nondimensionlization), 因此當我們考慮 2π 週期函數應該想像爲在單位圓上的週期函數。

(2) 讀者有興趣也可考慮區間 $[0,2\pi]$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}, \qquad 0<x<2\pi$$

令$x=0$也可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$。

§7 微分方程

如果由微分方程的角度來看 (2.3) 也是很有意思, 首先證明 $y=\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ 是二階微分方程

$$(1-x^2)y''-xy'=1 \tag{7.1}$$

的解, 讀者有興趣可以令 $z=y'$ 則 (7.1) 化爲 z 的一階微分方程 $(1-x^2)z'-xz=1$, 然後藉由積分因子得到精確解。其次將 $y=\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ 表爲無窮級數然後再利用 Wallis 積分 (3.9) 可證明 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, 但是 Euler 無法將這個方法推廣至 $\zeta(2n)$、$n\geq 2$。其想法如下:

$$\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2=\int_0^x d\left(\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2\right)=\int_0^x \frac{\sin^{-1}t}{\sqrt{1-t^2}}dt \tag{7.2}$$

另外利用二項式展開可得 $\sin^{-1}t$ 的 Taylor 展開式

$$\sin^{-1}t=\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \tag{7.3}$$

代回 (7.2) 並逐項積分

$$\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2=\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\frac{1}{2n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}dt \tag{7.4}$$

我們討論 (7.4) 最後一個積分, 爲了方便定義

$$I_n(x)\equiv\int_0^x \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}}dt \tag{7.5}$$

則由分部積分得遞迴關係式

$$\begin{aligned}I_n(x)&=\int_0^x \frac{t^{n+1}t}{\sqrt{1-t^2}}dt\\&=-x^{n+1}\sqrt{1-x^2}+(n+1)\int_0^x t^n\sqrt{1-t^2}dt\\&=-x^{n+1}\sqrt{1-x^2}+(n+1)I_{n-2}(x)-(n+1)I_n(x)\end{aligned}$$

整理得 $(n+2)I_n=(n+1)I_{n-2}-x^{n+1}\sqrt{1-x^2}$, 即

$$\int_0^x \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{n+1}{n+2}\int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt-\frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{1-x^2} \tag{7.6}$$

將 n 代換爲 $2n-1$ 並令 $x=1$ 則遞迴關係式 (7.6) 爲 $\left(\text{因爲}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=1\right)$

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{2n}{2n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n-1}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \int_0^1 \frac{t^{2n-3}}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \cdots\cdots \\
&= \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}
\end{aligned} \tag{7.7}
$$

這是 Wallis 積分, 代回 (7.4) 並令 $x=1$ 得

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{8} &= \frac{1}{2}(\sin^{-1} 1)^2 \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}
\end{aligned}
$$

將 $\zeta(2)$ 分解爲奇數與偶數兩部份

$$
\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \frac{\pi^2}{8}
$$

故 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$。 □

註解:

(1) 令 $t = \sin x$ 則 Wallis 積分 (7.7) 可表爲

$$
W_{2n+1} = \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)} \tag{7.8}
$$

這個結果也可以由分部積分而得

$$
\begin{aligned}
W_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x d(-\cos x) \\
&= -\sin^{m-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x dx \\
&= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x (1-\sin^2 x) dx \\
&= (m-1)W_{m-2} - (m-1)W_m
\end{aligned}
$$

W_m 滿足遞迴公式

$$
W_m = \frac{m-1}{m} W_{m-2} \tag{7.9}
$$

這個遞迴公式是跳兩個足碼, 因此需要兩個參數 (相當於二階微分方程需有兩個初始值)

$$
W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1
$$

所以

$$W_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{\pi}{2} \tag{7.10}$$

$$W_{2n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}xdx=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)} \tag{7.11}$$

特別提醒的是奇數與偶數的 Wallis 積分在本質上有極大之差異。

參考文獻

1. 愛德華著; 微積分的發展歷史, 凡異出版社 (2001)。
2. Willaim Dunham, Journey Through Genius, the great theorems of mathematics, John Wiley & Sons, Inc., (1990), Penguin Books (1991). (中譯本: 天才之旅, 偉大數學定理之創立; 林傑斌譯; 牛頓出版股份有限公司 (1995)。)
3. E. Hairer and G. Wanner, Analysis by Its History, UTM *Reading in Mathematics*, Springer-Verlag (1995).
4. O. Hijab, Introduction to Calculus and Classical Analysis, UTM Springer-Verlag (2007).
5. Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Vol. 1, Oxford University Press (1972).
6. 林琦焜, 從等比級數談起, 數學傳播(中央研究院數學所), Vol. 86, p. 42-53 (1998)。
7. 林琦焜, Euler(1707-1783)—數學的莎士比亞, 數學傳播(中央研究院數學所), Vol. 102, p. 39-51, (2002)。
8. 林琦焜, 傅立葉分析與應用, 滄海書局, 共569頁 (2010)。
9. 波利亞, 數學與猜想, 九章出版社。
10. George F. Simmons; Calculus with Analytic Geometry, 2nd Ed., McGraw-Hill (1996).

—本文作者任教國立交通大學應用數學系—