數學傳播 36卷1期, pp. 64-83

# 美國高中數學測驗 AMC 12 之機率問題(下)

洪偉誠 · 李俊賢 · 蔡誠祐 · 何家興 · 張福春

## 4. 幾何機率

前述兩節的問題皆建立在樣本點個數為可數時的情況, 接下來將介紹一不可數的無窮樣本空間 $S$ 且利用此空間的一些幾何測量 $m(S)$, 例如長度、面積、或者體積, 來求 $A$ 事件的機率。而 $A$ 事件的機率可用 $A$ 事件之幾何測量與樣本空間 $S$ 之幾何測量的比例來計算, 其形式有下列三種:

$$P(A)=\frac{A\text{的長度}}{S\text{的長度}} \quad \text{或} \quad P(A)=\frac{A\text{的面積}}{S\text{的面積}} \quad \text{或} \quad P(A)=\frac{A\text{的體積}}{S\text{的體積}}$$

**註**: 我們必須假設一不可數無窮樣本空間 $S$ 滿足均勻性質, 這樣才能做以上的幾何機率。

### 4.1. 幾何測量—長度

所謂長度的幾何測量, 表示其無窮樣本空間可用一線段、數線或是時間軸$\cdots$等表示, 則考慮某事件的機率時, 只需探討此事件所佔的線段 (或數線) 與樣本空間相對的長度比值即可, 下列為利用長度測量來求的機率問題。

**例 1.** (1972 AMC 12 #17) 隨機將一條線切為兩段, 試問較長的一段至少是較短的一段的 $x$ 倍 (其中 $x\geq 1$) 的機率為多少?

**(A)** $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{2}{x}$ **(C)** $\frac{1}{x+1}$ **(D)** $\frac{1}{x}$ **(E)** $\frac{2}{x+1}$

**解:(E)** 假設線段 $AB$ 被切為兩段, 若較長一段 (標記為 $\ell_1$, 長度為 $sx$) 為較短一段 (標記為 $\ell_2$, 長度為 $s$) 的 $x$ 倍, 則線段 $AB$ 總長度為 $(x+1)s$, 因此切點會落於 $\ell_2$ 中的機率為 $\frac{1}{x+1}$。

但因線段的切法可能爲 $(\ell_1, \ell_2)$ 或是 $(\ell_2, \ell_1)$ 兩種情況, 如下圖

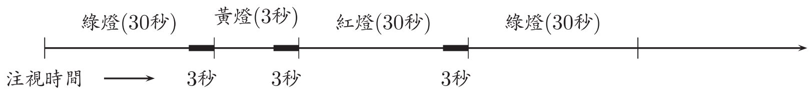
$$\underline{\quad \ell_1 \quad}|\underline{\ \ell_2\ } \quad 或 \quad \underline{\ \ell_2\ }|\underline{\quad \ell_1 \quad}$$

故所求機率爲 $\frac{2}{x+1}$。 □

**例 2.** (2007 AMC 12B #13) 有一交通號誌以下列的循環重複的運作: 綠燈 30 秒, 然後黃燈 3 秒, 之後再轉紅燈 30 秒。利亞隨機挑選三秒鐘的區間去注視號誌燈, 試問號誌燈在轉換顏色時, 利亞正在注視的機率爲多少?

**(A)** $\dfrac{1}{63}$ **(B)** $\dfrac{1}{21}$ **(C)** $\dfrac{1}{10}$ **(D)** $\dfrac{1}{7}$ **(E)** $\dfrac{1}{3}$

**解:(D)** 由題意知, 交通號誌運作一循環需時 63 秒, 而若利亞所注視的時間在當綠燈轉變爲黃燈、黃燈轉變爲紅燈或紅燈轉變爲綠燈的前三秒鐘內, 則利亞會看到號誌顏色正在轉變, 如下圖所示



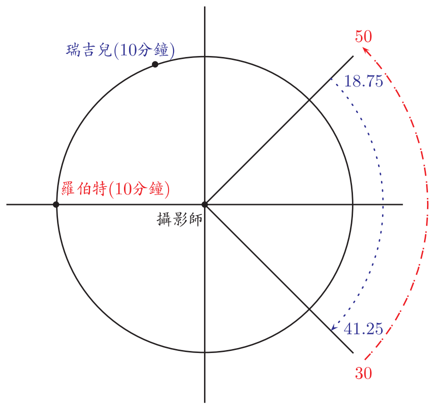

故所求機率爲

$$\frac{3+3+3}{63} = \frac{9}{63} = \frac{1}{7}$$ □

**例 3.** (2009 AMC 12B #18) 瑞吉兒與羅伯特在一圓形的跑道上跑步, 其中瑞吉兒以逆時鐘方向跑且跑完一圈需時 90 秒, 而羅伯特以順時鐘方向跑且跑完一圈需時 80 秒。此兩人同時在同一起跑線起跑, 有一站在跑道內的攝影師, 以起跑線爲中心線, 對 $\frac{1}{4}$ 的跑道做拍照, 試問在兩人起跑後的 10 分鐘到 11 分鐘間, 照片會同時拍到此兩人的機率爲何?

**(A)** $\dfrac{1}{16}$ **(B)** $\dfrac{1}{8}$ **(C)** $\dfrac{3}{16}$ **(D)** $\dfrac{1}{4}$ **(E)** $\dfrac{5}{16}$

**解:(C)** 因瑞吉兒跑一圈需要 90 秒, 所以當在第十分鐘的時候, 她已經跑了 $6\frac{2}{3}$ 圈, 爲下圖標示之位置, 則其進入到離開攝影師的拍照範圍時間爲第十分鐘的 18.75 秒到第十分鐘的 41.25 秒 (以"..." 表示瑞吉兒); 而羅伯特跑一圈需要 80 秒, 所以當在第十分鐘的時候, 他已經跑了 $7\frac{1}{2}$ 圈, 爲下圖標示之位置, 則其進入到離開攝影師的拍照範圍時間爲第十分鐘的 30 秒到第十分鐘的 50 秒 (以"− − −" 表示羅伯特)。




所以在第十分鐘第 30 秒到第 41.25 秒此兩人皆在此拍攝區域內, 故所求機率為

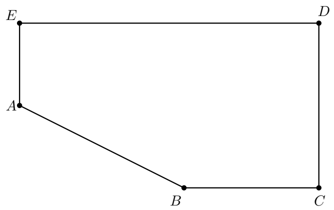
$$\frac{41.25-30}{60}=\frac{11.25}{60}=\frac{3}{16} \qquad \square$$

## 4.2. 幾何測量—面積

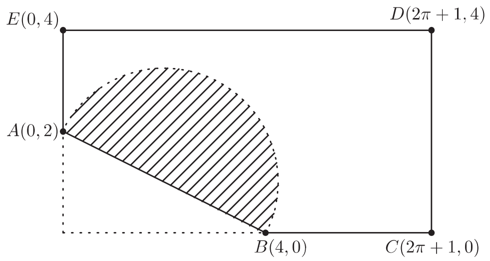
面積的幾何測量, 表示其無窮樣本空間可用平面區域來表示, 其樣本點皆落於區域中, 則考慮某事件的機率時, 只需探討此事件所佔的區域與樣本空間的區域相對面積比值即可, 下列為利用面積測量來求的機率問題。

**例 4.** (2001 AMC 12 #17) 已知五邊形 $ABCDE$ 的頂點為 $A(0,2), B(4,0), C(2\pi+1,0), D(2\pi+1,4)$ 及 $E(0,4)$, 現從這五邊形內部中任取一點 $P$, 試問 $\angle APB$ 是鈍角的機率為多少?

**(A)** $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{5}{16}$ **(D)** $\frac{3}{8}$ **(E)** $\frac{1}{2}$




**解:(C)** 以 $A, B$ 為直徑畫一半圓, 若點 $P$ 落於此半圓內, 會使得 $\angle APB$ 為鈍角, 如下圖斜線部分



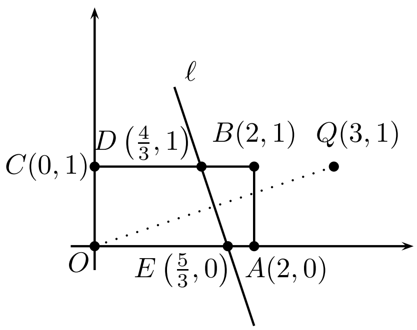

因爲 $\overline{AB}=2\sqrt{5}$, 所以圓半徑爲 $\sqrt{5}$, 故所求機率爲

$$\frac{\text{半圓面積(斜線部分)}}{ABCDE\text{ 面積}}=\frac{\frac{1}{2}\pi(\sqrt{5})^2}{(2\pi+1)\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2}=\frac{\frac{5}{2}\pi}{8\pi}=\frac{5}{16} \qquad \square$$

**例 5.** (2002 AMC 12B #18) 由 $(0,0),(2,0),(2,1),(0,1)$ 四點所圍的四邊形中任選一點 $P$, 試問 $P$ 到原點的距離小於 $P$ 到 $(3,1)$ 的距離的機率爲多少?

**(A)** $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{3}{4}$ **(D)** $\frac{4}{5}$ **(E)** 1

**解:(C)** 設 $O(0,0),A(2,0),B(2,1),C(0,1),Q(3,1)$, 連接線段 $\overline{OQ}$, 並做 $\overline{OQ}$ 之中垂線 $\ell$, 如下圖所示




因爲在 $\ell$ 上任一點到 $O$ 與 $Q$ 點距離相等, 故點 $P$ 在 $\ell$ 左方時, 會使得 $\overline{OP}<\overline{PQ}$, 即點落於區域 $OCDE$ 時皆可滿足, 故所求機率爲

$$\frac{OCDE\text{ 面積}}{OABC\text{ 面積}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\right)\cdot 1}{2\cdot 1}=\frac{3}{4} \qquad \square$$

**例 6.** (2009 AMC 12B #23) 在複數平面上有一區域 $S$ 定義如下:

$$S=\{x+iy:-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$$

有一複數 $z=x+iy$ 由區域 $S$ 中均勻且隨機的選取, 試問 $\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i\right)z$ 亦落於區域 $S$ 中的機率爲何?

**(A)** $\dfrac{1}{2}$ **(B)** $\dfrac{2}{3}$ **(C)** $\dfrac{3}{4}$ **(D)** $\dfrac{7}{9}$ **(E)** $\dfrac{7}{8}$

**解:(D) 解法一**: 由題意知

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i\right)z=\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i\right)(x+iy)=\frac{3(x-y)}{4}+\frac{3(x+y)}{4}\cdot i$$

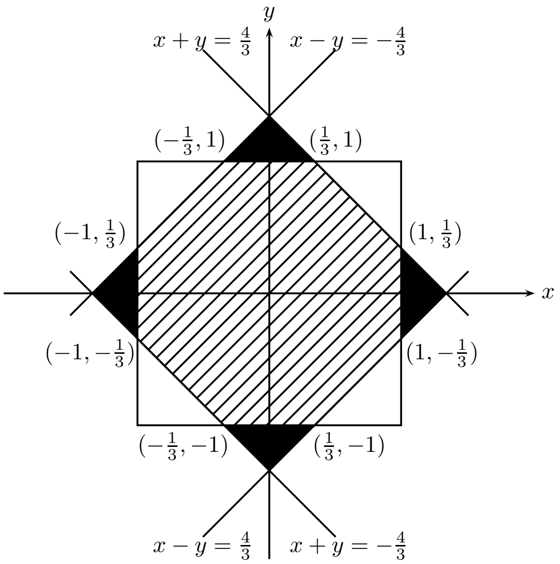
欲落於集合 $S$ 中, 表示

$$-1\le\frac{3(x-y)}{4}\le 1 \quad 且 \quad -1\le\frac{3(x+y)}{4}\le 1$$

即爲

$$|\,x-y\,|\le\frac{4}{3} \quad 且 \quad |\,x+y\,|\le\frac{4}{3}$$

將所求得之線性不等式與 $x,y$ 之條件繪製如下:




其中斜線部分表示能滿足題意要求的 $x,y$ 所形成的區域, 且四塊相等之黑色小等腰直角三角形面積爲

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

故所求機率爲

$$\frac{2\times 2-4\times\frac{2}{9}}{2\times 2}=\frac{\frac{28}{9}}{4}=\frac{7}{9}$$

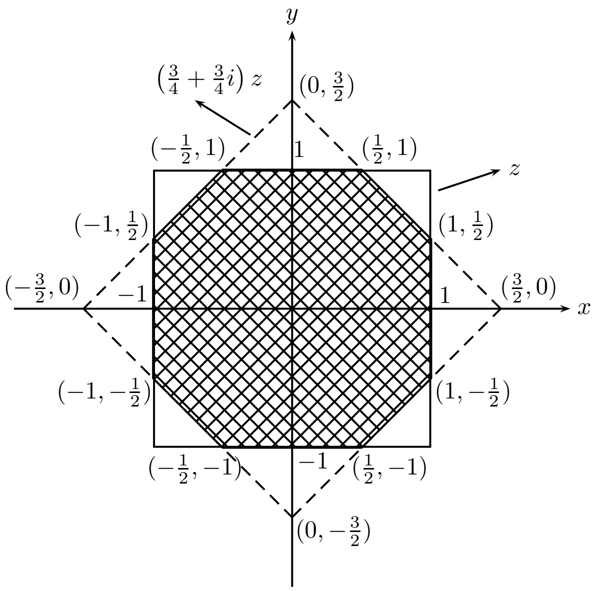
**解法二**: 將 $z$ 及複數 $\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i\right)$ 轉換爲極式如下:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2+y^2}(\cos\theta+i\sin\theta) \\ &= l\cdot(\cos\theta+i\sin\theta), \quad \text{其中} \quad l=\sqrt{x^2+y^2}, \theta\in[0,2\pi] \\ \frac{3}{4}+\frac{3}{4}i &= \frac{3\sqrt{2}}{4}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i\right)z &= \frac{3\sqrt{2}}{4}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\cdot[l\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)] \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{4}l\cdot[\cos(\theta+45^\circ)+i\sin(\theta+45^\circ)] \end{aligned}$$

因此可將 $\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i\right)z$ 視爲複數 $z$ 在複數平面上被旋轉 $45^\circ$, 且長度增爲 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 倍, 如下圖所示:




其中實線正方形部分表複數 $z$ 可能的值, 虛線正方形部分表示經過旋轉放大後可能的值, 則圖中斜線部分即表示 $\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i\right)z$ 的值亦屬於集合 $S$, 故所求機率爲

$$\frac{2^2-4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\cdot 3^2}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{2}}=\frac{7}{9} \qquad \square$$

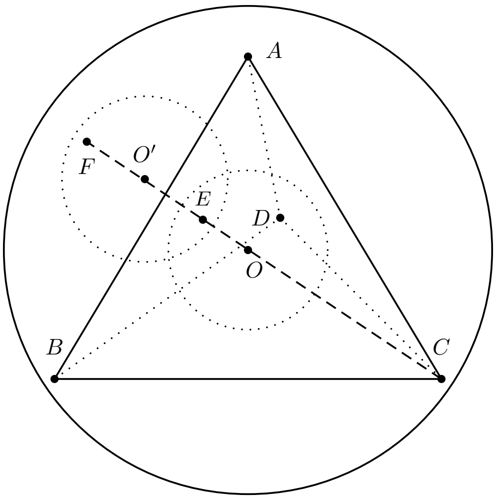
## 4.3. 幾何測量—體積

體積的幾何測量, 表示其無窮樣本空間可用立體區域來表示, 其樣本點皆落於此區域中, 則考慮某事件的機率時, 只需探討此事件所佔的區域與樣本空間的區域相對體積比值即可, 下列爲利用體積測量來求的機率問題。

**例 7.** (1999 AMC 12 #29) 已知一正四面體有一個外接球與一個內切球, 今知在四面體中之四個面, 均有一個最大的球 (在正四面體外) 與其相切且與外接球也相切, 若在外接球內任選一點 $p$, 則 $p$ 落在內切球內或正四面體外圍的四個球內之機率最接近下列哪一個選項?

**(A)** 0 **(B)** 0.1 **(C)** 0.2 **(D)** 0.3 **(E)** 0.4

**解:(C)** 假設 $ABCD$ 爲邊長爲 $a$ 之正四面體, 其外接球與內切球的球心皆爲 $O$, 半徑分別爲 $r, r'$, 而內切球切正四面體一面於 $E$ 點, 並有以球心爲 $O'$ 半徑爲 $r''$ 的球同時與外接球與正四面體皆相切, 且切外接球於 $F$ 點, 因此 $C-O-E-O'-F$ 爲 共線, 如下圖



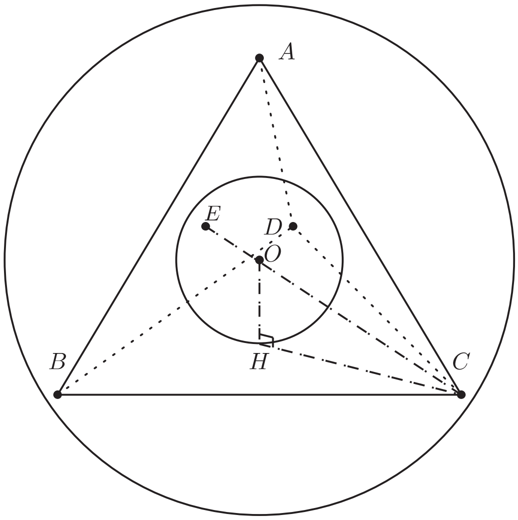

則

$$r=\overline{OC}=\overline{OF}=\frac{\sqrt{6}}{4}a, \quad r'=\overline{OE}=\frac{\sqrt{6}}{12}a$$

所以 $r''=\overline{O'E}=\frac{\sqrt{6}}{12}a$, 則 $r:r':r''=3:1:1$。不失一般性假設外接球體積爲 $27V$, 正四面體內切球的球體積爲 $V$, 與外接球及正四面體相切的球體積爲 $V$。又因爲同時與外接球及正四面體相切的球有 4 個, 故所求機率爲

$$\frac{V+4\times V}{27V}=\frac{5}{27} \qquad \square$$

**註**:　令外接球與內切球的球心皆爲 $O$, 半徑分別爲 $\overline{OA} = \overline{OC} = r, \overline{OH} = r'$, 且正四面體 $ABCD$ 之邊長爲 $a$, 點 $E$ 爲內切球切正四面體的一切點, 如下圖




則點 $H$ 必爲 $\triangle BCD$ 之重心, 所以

$$\overline{CE} = \overline{AH} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$\overline{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$\overline{OH} = \frac{\sqrt{6}}{3}a - r$$

由畢氏定理

$$\overline{OC}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{CH}^2$$

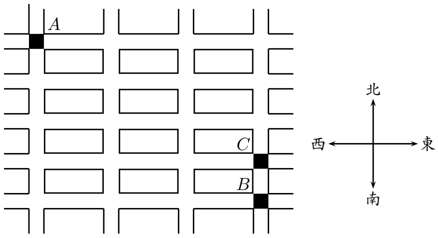
$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - r\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$$

可求得外接球半徑 $r = \frac{\sqrt{6}}{4}a$, 內切球半徑 $r' = \frac{\sqrt{6}}{12}a$。

## 5. 路徑問題

「路徑問題」爲加法原理與乘法原理的特殊應用, 常以走捷徑問題或是空間中各式立體圖形的行走方式出現, 以下爲幾個路徑問題的探討。

**例 8.** (1982 AMC 12 #25) 下圖爲某城市的一部份地圖, 小的長方形表示街塊 (註: 一個街塊表示東西向二個相鄰街道之間及南北向二個相鄰街道之間的區域), 而其餘部分表示街道。有一學生每天早上都從街口 $A$ 到街口 $B$, 其行走方向爲向東或是向南, 在每一個街口選擇向東或是向南的機率皆相同, 且不會影響其他街口的選擇。試問在某一天早上, 該名學生通過街口 $C$ 的機率爲多少?




**(A)** $\dfrac{11}{32}$　　**(B)** $\dfrac{1}{2}$　　**(C)** $\dfrac{4}{7}$　　**(D)** $\dfrac{21}{32}$　　**(E)** $\dfrac{3}{4}$

**解:(D)** 將街口 $A$ 至 $B$ 的機率表示如下

$$
\begin{tikzcd}
1(A) \arrow[r] \arrow[d] & \frac{1}{2} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{1}{4} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{\frac{1}{8}} \arrow[d] \\
\frac{1}{2} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{1}{2}(a) \arrow[r] \arrow[d] & \frac{3}{8} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{\frac{5}{16}(b)} \arrow[d] \\
\frac{1}{4} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{3}{8} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{3}{8} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{\frac{1}{2}} \arrow[d] \\
\frac{1}{8} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{1}{4} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{5}{16} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{\frac{21}{32}(C)} \arrow[d] \\
\mathbf{\frac{1}{16}} \arrow[r, "1"] & \mathbf{\frac{3}{16}} \arrow[r] & \mathbf{\frac{11}{32}} \arrow[r] & 1(B)
\end{tikzcd}
$$

由圖可知由街口 $A$ 走到街口 $B$ 中途會通過 $C$ 的機率爲 $\frac{21}{32}$。 □

**註:**　其中由 $A$ 走至 $a$ 的機率爲

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{由左方到達 } a}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{由上方到達 } a}=\frac{1}{2}$$

以此類推, 但在圖中的最下方及最右側兩側的機率計算需特別注意, 因需到達街口 $B$, 故不能

向東 (向南), 只能向南 (向東), 因此選擇走向的機率為 1, 例如走至 (b) 之機率為

$$\frac{1}{8}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$$

即表示由 $A$ 到達 $B$ 的每一條路機率並不相等 (最右側及最下方), 故不能只計算由 $A$ 到達 $B$ 的路徑。

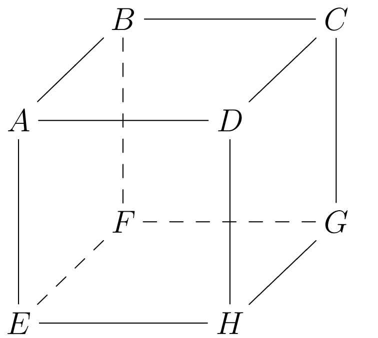
**錯誤解法**:

$$\begin{tikzcd}
1(A) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & 4 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & 6 \arrow[r] \arrow[d] & 10 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] \arrow[d] & 4 \arrow[r] \arrow[d] & 10 \arrow[r] \arrow[d] & 20(C) \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 15 \arrow[r] & 35(B)
\end{tikzcd}$$

由街口 $A$ 走到街口 $B$ 中途會通過 $C$ 的機率為 $\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$。

> **例 9.** (2006 AMC 12A #20) 一隻蟲從一個正立方體的某一個頂點開始沿著稜線依下列的規則移動, 每次移動均由一頂點開始沿交會於此頂點的三條稜線中之一條稜線移至下一個頂點, 每一條稜線被選到的機率相同, 且每次選取都是獨立的。試問七次移動後, 這隻蟲經過每一個頂點恰好一次的機率是多少?
>
> **(A)** $\frac{1}{2187}$　**(B)** $\frac{1}{729}$　**(C)** $\frac{2}{243}$　**(D)** $\frac{1}{81}$　**(E)** $\frac{5}{243}$

**解:(C)** 假設蟲的起始點為正立方體中的 $A$ 點, 如下圖中 所示位置

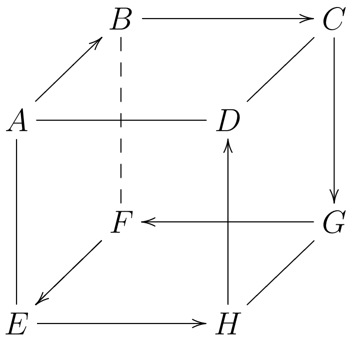


則在 $A$ 點有 3 種方向可以選擇行走, 假設選擇走至 $B$, 因需 7 次走完全部的頂點, 所以不可重複行走走過的路徑, 故只有 2 種行走方向 ($C$ 或 $F$) 可以選擇, 以下爲走至 $C$ 點後的可能行走方式:

(1) 若下一個行走方向爲往下至另一面 ($G$ 點) 時, 則其走完全部頂點的走法只有 1 種, 爲

$$A\ B\ C\ G\ F\ E\ H\ D$$

如下圖所示

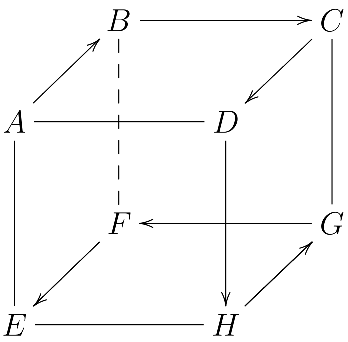


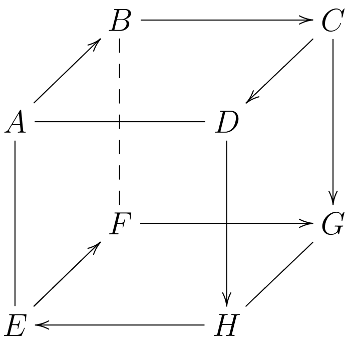

會有 $3\times 2\times 1=6$ 種走法。

(2) 若下一個行走方向爲往下至另一面 ($D$ 點) 時, 則其走完全部頂點的走法只有 2 種, 爲

$$A\ B\ C\ D\ H\ G\ F\ E \quad 或 \quad A\ B\ C\ D\ H\ E\ F\ G$$

如下圖所示






會有 $3\times 2\times 2=12$ 種走法。

綜合上述情況, 所求機率爲

$$\frac{6+12}{3^7}=\frac{18}{3^7}=\frac{2}{243}$$

□

# 習題

## 機率

**習題 10.** (1963 AMC 12 #36) 假設某人最初有 64 元, 和另一人打賭六次, 結果輸贏各三次, 且輸贏的機會相等, 若不考慮輸贏的先後順序。若賭金爲每一次賭博時剩餘錢之半, 試問此人最後的輸贏情況爲何? **答案: C**

**(A)** 輸 27 元 **(B)** 贏 27 元 **(C)** 輸 37 元 **(D)** 不贏也不輸
**(E)** 輸、贏依據輸贏所發生之次序而定

**習題 11.** (1970 AMC 12 #31) 如果由所有的五位數字的集合中隨機的挑選出一個數, 使得各位數字和爲 43, 試問這個數可以被 11 整除的機率爲多少? **答案: B**

**(A)** $\dfrac{2}{5}$ **(B)** $\dfrac{1}{5}$ **(C)** $\dfrac{1}{6}$ **(D)** $\dfrac{1}{11}$ **(E)** $\dfrac{1}{15}$

**習題 12.** (1981 AMC 12 #26) 艾麗絲、鮑勃和卡羅爾輪流投擲一顆骰子, 由艾麗絲先開始, 按著是鮑勃, 然後是卡羅爾, 然後又是艾麗絲, 以此循環輪流投擲骰子, 試求卡羅爾爲第一個擲出 6 點的機率爲多少? (任何一次投擲出 6 點的機率都是 $\frac{1}{6}$, 與任何其他次投擲的結果無關) **答案: D**

**(A)** $\dfrac{1}{3}$ **(B)** $\dfrac{2}{9}$ **(C)** $\dfrac{5}{18}$ **(D)** $\dfrac{25}{91}$ **(E)** $\dfrac{36}{91}$

**習題 13.** (1984 AMC 12 #19) 在一盒子內裝有 11 顆球, 球上分別標有號碼 $1, 2, \ldots, 11$, 若隨機地從盒中抽出 6 顆球, 試問抽出的球的號碼之和是奇數的機率是多少? **答案: D**

**(A)** $\dfrac{100}{231}$ **(B)** $\dfrac{115}{231}$ **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** $\dfrac{118}{231}$ **(E)** $\dfrac{6}{11}$

**習題 14.** (1988 AMC 12 #28) 投擲一枚“不公正”的硬幣, 已知其正面朝上的機率爲 $p$。設 $w$ 爲在 5 次互相獨立的投擲中, 正面朝上的次數正好是 3 次的機率, 若 $w = \frac{144}{625}$, 則 $p$ 值爲 **答案: D**

**(A)** $p$ 必爲 $\dfrac{2}{5}$ **(B)** $p$ 必爲 $\dfrac{3}{5}$ **(C)** $p$ 必大於 $\dfrac{3}{5}$ **(D)** $p$ 無定值
**(E)** 沒有 $p$ 值使得 $w = \dfrac{144}{625}$

**習題 15.** (1990 AMC 12 #18) 從集合 $S=\{1,2,\ldots,99,100\}$ 中先隨機挑選出一數字 $a$, 再從集合 $S$ 中隨機挑選出一數字 $b$, 試求 $3^a+7^b$ 的個位數字爲 8 的機率? **答案: C**

**(A)** $\frac{1}{16}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{3}{16}$ **(D)** $\frac{1}{5}$ **(E)** $\frac{1}{4}$

**習題 16.** (1991 AMC 12 #13) 三匹馬 $x,y$ 與 $z$ 之間進行一場比賽, 且必會分出名次, 若不利於 $x$ 勝的架勢是 3 對 1, 不利於 $y$ 勝的架勢是 2 對 3, 試問不利於 $z$ 勝的架勢是幾對幾? (“不利於 $H$ 勝的架勢是 $p$ 對 $q$”, 這句話的意思是 $H$ 勝的機率是 $\frac{q}{p+q}$, 且 $p,q$ 互質)
**答案: D**

**(A)** 3 對 20 **(B)** 5 對 6 **(C)** 8 對 5 **(D)** 17 對 3 **(E)** 20 對 3

**習題 17.** (1992 AMC 12 #29) 一個不公正的硬幣, 擲出正面的機率爲 $\frac{2}{3}$, 若擲 50 次, 試求硬幣出現偶數次正面的機率。 **答案: D**

**(A)** $25\left(\frac{2}{3}\right)^{50}$ **(B)** $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{50}}\right)$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3^{50}}\right)$ **(E)** $\frac{2}{3}$

**習題 18.** (1994 AMC 12 #30) 當投擲 $n$ 個六面公正骰子得到點數總和爲 1994 之機率與得到點數總和爲 $S$ 的機率相等, 試問 $S$ 的最小值爲何? **答案: C**

**(A)** 333 **(B)** 335 **(C)** 337 **(D)** 339 **(E)** 341

**習題 19.** (1995 AMC 12 #20) 若 $a,b,c$ 爲從集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 中隨機選取出的三個數字 (可重複選取), 試問 $ab+c$ 爲偶數的機率爲何? **答案: B**

**(A)** $\frac{2}{5}$ **(B)** $\frac{59}{125}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{64}{125}$ **(E)** $\frac{3}{5}$

**習題 20.** (1996 AMC 12 #22) 將一圓周平均分成 1996 段, 所以有 1996 個平分點, 今從此 1996 個點中選出 4 個不同的點 $A,B,C,D$ (每個點被取到的機率相同), 則試求 $\overline{AB}$ 弦與 $\overline{CD}$ 弦相交的機率爲多少? **答案: B**

**(A)** $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{2}{3}$ **(E)** $\frac{3}{4}$

**習題 21.** (1996 AMC 12 #26) 一箱子內有 4 種不同顏色的彈珠, 分別爲紅、藍、白、綠四色, 今知每一次取出一個彈珠, 取後不放回, 連續取出 4 個, 且下列四個事件發生的機率皆相同:

(a) 取出四個紅色

(b) 取出一白三紅

(c) 取出一白、一藍、二紅

(d) 取出四個均不同色

則箱子中最少需要多少個彈珠, 才能滿足上述條件? **答案**: **B**

**(A)** 19 **(B)** 21 **(C)** 46 **(D)** 69 **(E)** 超過 69

**習題 22.** (1999 AMC 12 #24) 已知在一圓上有 6 個點, 任兩點可形成一弦, 從其中任取四弦, 請問此四條弦可形成頂點在圓上之凸四邊形的機率爲多少? **答案**: **B**

**(A)** $\frac{1}{15}$ **(B)** $\frac{1}{91}$ **(C)** $\frac{1}{273}$ **(D)** $\frac{1}{455}$ **(E)** $\frac{1}{1365}$

**習題 23.** (2000 AMC 12 #23) Gamble 教授買了一張樂透彩券, 需從 1 到 46 個數字中選出六個數字填入, 已知他所選之六個數字分別以 10 爲底取 log 後, 再加起來爲一整數, 若中獎之彩券也是依照此相同條件, 則 Gamble 教授中獎的機率爲多少? **答案**: **B**

**(A)** $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** 1

**習題 24.** (2001 AMC 12 #11) 一盒子中放有 5 個圓形籌碼, 其中 3 個是紅色, 2 個是白色, 每一次自盒子中任意取出 1 個籌碼, 取出後不再放回盒子中, 直到所有紅色或所有白色籌碼被取出時爲止, 試求白色籌碼先被取完的機率爲多少? **答案**: **D**

**(A)** $\frac{3}{10}$ **(B)** $\frac{2}{5}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{3}{5}$ **(E)** $\frac{7}{10}$

**習題 25.** (2002 AMC 12A #16) Tina 從集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 隨機選 2 個不同的數, Sergio 從集合 $\{1, 2, \ldots, 10\}$ 隨機選 1 個數, 則 Sergio 選的數大於 Tina 選的 2 個數之和的機率爲多少? **答案**: **A**

**(A)** $\frac{2}{5}$ **(B)** $\frac{9}{20}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{11}{20}$ **(E)** $\frac{24}{25}$

**習題 26.** (2004 AMC 12B #4) 有一整數 $x$, 其中 $10 \le x \le 99$, 隨機抽取出一個數字, 且每一個數字被選擇的機率相等, 試求整數 $x$ 的位數中至少有一個數字 7 的機率爲何?
**答案**: **B**
**(A)** $\dfrac{1}{9}$ **(B)** $\dfrac{1}{5}$ **(C)** $\dfrac{19}{90}$ **(D)** $\dfrac{2}{9}$ **(E)** $\dfrac{1}{3}$

**習題 27.** (2005 AMC 12B #11) 在一信封內有 2 張 \$1、2 張 \$5、2 張 \$10 及 2 張 \$20, 共 8 張鈔票。由信封中以取後不放回的方式隨機抽取出 2 張鈔票, 試問總金額大於或等於 \$20 的機率爲多少? **答案**: **D**
**(A)** $\dfrac{1}{4}$ **(B)** $\dfrac{2}{7}$ **(C)** $\dfrac{3}{7}$ **(D)** $\dfrac{1}{2}$ **(E)** $\dfrac{2}{3}$

**習題 28.** (2006 AMC 12A #22) 一個半徑爲 $r$ 的圓, 在其內部有一個邊長爲 2 的正六邊形, 且圓心與正六邊形的中心重合。若站在圓上任一點可看見正六邊形三個完整邊的機率爲 $\frac{1}{2}$, 試問 $r$ 之值爲何? **答案**: **D**
**(A)** $2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ **(B)** $3\sqrt{3}+\sqrt{2}$ **(C)** $2\sqrt{6}+\sqrt{3}$ **(D)** $3\sqrt{2}+\sqrt{6}$
**(E)** $6\sqrt{2}-\sqrt{3}$

**習題 29.** (2006 AMC 12B #17) 有一對特殊的骰子, 其各面點數 1, 2, 3, 4, 5 及 6 出現的機率比值爲 $1:2:3:4:5:6$, 試問兩顆骰子所投擲出來的點數和爲 7 的機率爲多少? **答案**: **C**
**(A)** $\dfrac{4}{63}$ **(B)** $\dfrac{1}{8}$ **(C)** $\dfrac{8}{63}$ **(D)** $\dfrac{1}{6}$ **(E)** $\dfrac{2}{7}$

**習題 30.** (2007 AMC 12A #12) 從 0 到 2007 中任意的選出整數 $a, b, c, d$, 它們不必都相異, 試問 $ad-bc$ 爲偶數的機率是多少? **答案**: **E**
**(A)** $\dfrac{3}{8}$ **(B)** $\dfrac{7}{16}$ **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** $\dfrac{9}{16}$ **(E)** $\dfrac{5}{8}$

## 條件機率

**習題 31.** (1973 AMC 12 #23) 有兩張卡片, 一張兩面都是紅的, 另一張一面是紅的一面是藍的, 兩張卡片被選擇的機率相等, 皆爲 $\frac{1}{2}$。現在選擇一張放在桌子上, 試問該卡片上面一面是紅的, 則下面一面也是紅的機率是多少? **答案**: **D**

**(A)** $\dfrac{1}{4}$ **(B)** $\dfrac{1}{3}$ **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** $\dfrac{2}{3}$ **(E)** $\dfrac{3}{4}$

**習題 32.** (1989 AMC 12 #20) 設 $x$ 爲 100 到 200 之間任選的實數, 若 $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = 12$, 則 $\lfloor\sqrt{100x}\rfloor = 120$ 的機率爲多少? 其中 $\lfloor v\rfloor$ 是指不超過 $v$ 的最大整數。 **答案**: **B**

**(A)** $\dfrac{2}{25}$ **(B)** $\dfrac{241}{2500}$ **(C)** $\dfrac{1}{10}$ **(D)** $\dfrac{96}{625}$ **(E)** 1

**習題 33.** (2003 AMC 12B #19) 設 $S$ 爲數列 $1,2,3,4,5$ 的所有排列中, 第一個數字不可爲 1 的排列所形成的集合。令最簡分數 $\frac{a}{b}$ 表示從集合 $S$ 中隨機挑選出一種排列, 其第二個數字爲 2 的機率, 試求 $a+b$ 之值爲何? **答案**: **E**

**(A)** 5 **(B)** 6 **(C)** 11 **(D)** 16 **(E)** 19

## 幾何機率

**習題 34.** (1987 AMC 12 #26) 將 2.5 隨機地分解成兩個非負實數的和, 例如 $2.5 = 2.143+0.357$ 或 $2.5 = \sqrt{3}+(2.5-\sqrt{3})$。再把每一數改爲與它最接近的整數, 如前面第一個例子的 $2.143, 0.357$ 分別改爲 $2, 0$, 而第二個例子的 $\sqrt{3}, (2.5-\sqrt{3})$ 分別改爲 $2, 1$, 試問在這樣的規則下最後得到的兩整數和爲 3 的機率是多少? **答案**: **B**

**(A)** $\dfrac{1}{4}$ **(B)** $\dfrac{2}{5}$ **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** $\dfrac{3}{5}$ **(E)** $\dfrac{3}{4}$

**習題 35.** (2003 AMC 12A #16) 在正三角形 $ABC$ 內部中任取一點 $P$, 則 $\triangle ABP$ 的面積同時大於 $\triangle ACP$ 與 $\triangle BCP$ 面積的機率爲何? **答案**: **C**

**(A)** $\dfrac{1}{6}$ **(B)** $\dfrac{1}{4}$ **(C)** $\dfrac{1}{3}$ **(D)** $\dfrac{1}{2}$ **(E)** $\dfrac{2}{3}$

**習題 36.** (2003 AMC 12B #21) 有一物體由 $A$ 點直線前進 8 公分至 $B$ 點, 再轉 $\alpha$ 弧度至另一方向, 其中 $\alpha \in (0, \pi)$, 之後再直線前進 5 公分至 $C$ 點, 試求 $\overline{AC} > 7$ 的機率爲何? **答案**: **D**

**(A)** $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{3}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

**習題 37.** (2003 AMC 12B #25) 由一圓的圓周上任取三點, 試求在此三點中, 任意兩點間的距離皆會小於圓半徑的機率爲何? **答案**: **D**

**(A)** $\frac{1}{36}$ **(B)** $\frac{1}{24}$ **(C)** $\frac{1}{18}$ **(D)** $\frac{1}{12}$ **(E)** $\frac{1}{9}$

**習題 38.** (2004 AMC 12A #20) 從 0 與 1 之間隨機獨立的取出兩實數 $a$ 與 $b$, 並將 $a, b$ 之和記作 $c$, 分別以 $A, B, C$ 表示最接近 $a, b, c$ 的整數, 試問 $A + B = C$ 的機率爲多少? **答案**: **E**

**(A)** $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{2}{3}$ **(E)** $\frac{3}{4}$

**習題 39.** (2006 AMC 12B #20) 令 $x$ 爲由區間 $(0, 1)$ 中隨機挑選的數, 試求滿足下列方程式

$$\lfloor \log_{10} 4x \rfloor - \lfloor \log_{10} x \rfloor = 0$$

之機率爲多少? 其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示小於或等於 $x$ 的最大整數。 **答案**: **C**

**(A)** $\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{3}{20}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{5}$ **(E)** $\frac{1}{4}$

**習題 40.** (2008 AMC 12B #21) 平面上有兩個半徑爲 1 的圓 $A, B$, 其中圓 $A$ 的圓心爲 $(0, 0)$ 到 $(2, 0)$ 所形成的線段中隨機挑選, 而圓 $B$ 的圓心爲 $(0, 1)$ 到 $(2, 1)$ 所形成的線段中隨機挑選, 試問圓 $A$ 與圓 $B$ 相交的機率爲多少? **答案**: **E**

**(A)** $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ **(B)** $\frac{3\sqrt{3}+2}{8}$ **(C)** $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$ **(D)** $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ **(E)** $\frac{4\sqrt{3}-3}{4}$

## 路徑問題

**習題 41.** (2003 AMC 12A #22) 兩物體 $A$ 與 $B$ 經由一系列步驟同時等速在座標平面上移動, 每次移動一個單位。物體 $A$ 從 $(0,0)$ 開始移動, 且每一步驟是向右或向上, 兩者機率一樣。物體 $B$ 從 $(5,7)$ 開始移動且每一步驟是向左或向下, 兩者機率一樣, 則兩物體 $A$ 與 $B$ 相遇的機率約爲多少呢? (四捨五入到小數點第二位) **答案**: **C**

**(A)** 0.10 **(B)** 0.15 **(C)** 0.20 **(D)** 0.25 **(E)** 0.30

**習題 42.** (2005 AMC 12B #25) 有六隻螞蟻同時站在正八面體的相異六個頂點上, 然後這六隻螞蟻同時且獨立的移動至與其原本所站之頂點相鄰的四個頂點之一, 移動至每一個頂點的機率皆相同, 試求沒有任何兩隻螞蟻會在同一個頂點相遇的機率爲多少? **答案**: **A**

**(A)** $\frac{5}{256}$ **(B)** $\frac{21}{1024}$ **(C)** $\frac{11}{512}$ **(D)** $\frac{23}{1024}$ **(E)** $\frac{3}{128}$

**習題 43.** (2009 AMC 12B #17) 在立方體的每一個面上, 選擇某一邊的中點畫一條線至另一邊的中點, 而在每一面上隨機且獨立的選擇一雙對邊, 試問會有一連續的線環繞立方體的機率爲何? **答案**: **B**

**(A)** $\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{3}{16}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{3}{8}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

## 附錄

本附錄按年份列出所收集的全部 AMC 12 之機率題目, 題號欄第一個數字爲該年 AMC 12 之題號, 括號內第一個數字爲此題在本文之題號, 第二個數字爲所在頁數。如: 1963 36 (35, 24) 表示此題爲 1963 年 AMC 12 第 36 題考題, 在本文所在位置爲第 35 題、第 24 頁; 2007 13B (27, 16) 表示此題爲 2007 年 AMC 12 之 B 卷第 13 題考題, 在本文所在位置爲第 27 題、第 16 頁。

| 年份 | 題號 |
|---|---|
| 1963 | 36 (10, 75) |
| 1970 | 31 (11, 75) |
| 1971 | 23 (140期 9, 69) |
| 1972 | 17 (1, 64) |
| 1973 | 23 (31, 79) |

| 年份 | 題號 |
|---|---|
| 1974 | 24 (140期 15, 72) |
| 1975 | 18 (140期 18, 75) |
| 1976 | 8 (140期 3, 66) |
| 1977 | 17 (140期 4, 66) |
| 1978 | 19 (140期 2, 65) |
| 1979 | 27 (140期 11, 70) |
| 1980 | 20 (140期 12, 70) |
| 1981 | 26 (12, 75) |
| 1982 | 25 (8, 72) |
| 1983 | 15 (140期 22, 77), 26 (140期 17, 74) |
| 1984 | 19 (13, 75) |
| 1985 | 6 (140期 1, 65), 24 (140期 19, 75) |
| 1986 | 22 (140期 8, 68) |
| 1987 | 26 (34, 79) |
| 1988 | 12 (140期 13, 71), 28 (14, 75) |
| 1989 | 20 (32, 79) |
| 1990 | 18 (15, 76) |
| 1991 | 13 (16, 76) |
| 1992 | 29 (17, 76) |
| 1993 | 24 (140期 6, 67) |
| 1994 | 27 (140期 25, 81), 30 (18, 76) |
| 1995 | 20 (19, 76) |
| 1996 | 16 (140期 21, 77), 22 (20, 76), 26 (21, 77) |
| 1997 | 10 (140期 10, 69) |
| 1999 | 24 (22, 77), 29 (7, 70) |
| 2000 | 23 (23, 77) |
| 2001 | 11 (24, 77), 17 (4, 66) |
| 2002 | 16A (25, 77), 16B (140期 16, 74), 18B (5, 67), 15C (140期 23, 78) |
| 2003 | 8A (140期 5, 66), 16A (35, 79), 22A (41, 81), 19B (33, 79), 21B (36, 80), 25B (37, 80) |
| 2004 | 20A (38, 80), 4B (26, 78), 20B (140期 14, 72) |
| 2005 | 14A (140期 24, 80), 23A (140期 20, 76), 11B (27, 78), 25B (42, 81) |
| 2006 | 20A (9, 73), 22A (28, 78), 17B (29, 78), 20B (39, 80) |
| 2007 | 12A (30, 78), 13B (2, 65) |
| 2008 | 21B (40, 80), 22B (140期 7, 67) |
| 2009 | 17B (43, 81), 18B (3, 65), 23B (6, 68) |

# 參考文獻


1. Artino, R. A., Gaglione, A. M. and Shell, N. (1982). *Contest Problem Book IV: Annual High School Examinations* 1973∼1982. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
2. Berzsenyi, G. and Maurer, S. B. (1997). *Contest Problem Book V: American High School Mathematics Examinations and American Invitational Mathematics Examinations* 1983∼1988. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
3. Maurer, S. B., Reiter, H.B. and Schneider, L. J. (2001). The American High School Mathematics Examination: A 50 year Retrospective. *Mathematics Competitions* **14**, 45-66. `http://www.math.uncc.edu/~hbreiter/AHSME/Steve&Leo.html`
4. Reiter, H. B. (2006). *The Contest Problem Book VII: American Mathematics Competitions,* 1995∼2000 *Contests*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
5. Rusczyk, R. et al. "Art of Problem Solving Forum." From AoPS Incorporated. `http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php?c=182&cid=44`
6. Salkind, C. T. (1961). *Contest Problem Book: Problems from the Annual High School Contests of the Mathematical Association of America.* New York: Random House.
7. Salkind, C. T. (1966). *Contest Problem Book II: Annual High School Contests* 1961∼1965. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
8. Salkind, C. T. and Earl, J. M. (1973). *Contest Problem Book III: Annual High School Contests* 1966∼1972. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
9. Schneider, L. J. (1997). *Contest Problem Book VI: American High School Mathematics Examinations and American Invitational Mathematics Examinations* 1989∼1994. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
10. Wells, D. and Faires, J. D. (2008). *The Contest Problem Book IX: American Mathematics Competitions* (AMC 12) 2001∼2007. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
11. 財團法人九九文教基金會。`http://www.99cef.org.tw/`


—本文作者於投稿時洪偉誠是國立中山大學應用數學系碩士班畢業生; 李俊賢、蔡誠祐、何家興是國立中山大學應用數學系大四學生, 張福春任教國立中山大學應用數學系—