

# Lovász 的雨傘

張鎮華

## 1. 前言

匈牙利數學家 László Lovász<sup>1</sup> 於 1999 年獲得 Wolf 獎<sup>2</sup>, 他的得獎理由是「在離散數學裡獲得突破性的基本結果, 其在純數學、應用數學以及理論計算機科學都有十分重要的應用。藉由引進一些仰賴於幾何、多面體及拓樸技術的深刻數學方法, 他解決了許多重要的問題, 包括完美圖猜測, Kneser 猜測及決定五邊形 Shannon 容量···」。

這篇文章主要的目的就是要來介紹 Lovász 決定五邊形 Shannon 容量的精彩推導, 順帶談論 1960 年代離散數學家所關心的一些議題, 我們先從圖論談起。

## 2. 圖論緣起

很少有一個數學次領域可以說是從那一年誕生的, 而今, 大部分的人都肯定, 圖論的產生源自於 1736 年歐拉 (Euler) 的一篇討論七橋問題的文章 [1]。

在十八世紀的時候, 東普魯士的 Königsburg (現今俄羅斯的 Kaliningrad) 市有一條 Pregel 河 (現今 Pregolya 河) 流經, 河的中心有兩座小島, 小島與河的兩岸有七座橋相連接 (參見圖 1 左邊之示意圖)。當地流傳一則這樣的謎題, 要如何才能從某一塊土地開始, 將每一座橋恰好經過一次。

---

<sup>1</sup>László Lovász 生於 1948 年 3 月 9 日, 他的工作主要在組合學, 於 1999 年獲得 Wolf 獎, 以及 Knuth 獎, 於 2010 年獲得 Kyoto 獎。他曾獲得三次 (1964, 1965, 1966) 國際數學奧林匹亞金牌, 1970 年獲得匈牙利科學院的博士學位。Lovász 主要在 Eötvös 大學工作, 於 1975~1982 曾主持 Szeged 大學幾何學系, 1990 年代在 Yale 大學, 並在微軟研究中心直到 2006 年再回 Eötvös 大學。他從 2007 年 1 月 1 日到 2010 年 12 月 31 日這四年擔任國際數學聯盟主席。

<sup>2</sup>1976 年 Ricardo Subiranay Lobo Wolf 和他太太 Francisca 捐出一千萬美金, 創立 Wolf 基金會, 獎勵在農業、化學、數學、醫學、物理、藝術六大領域有傑出貢獻的科學家。

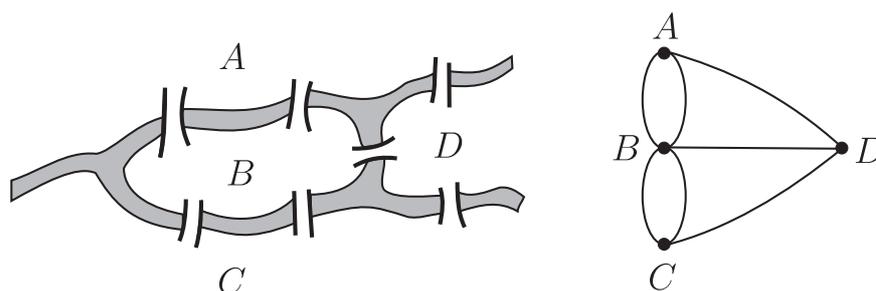


圖1: 四塊土地及七座橋的示意圖 (左) 及其抽象表示 (右)。

一般觀察力略為敏銳的人在經過一些嘗試之後，很快就會發現這是不可能的。當做數學家，歐拉給出一個「精確」的說法。首先，他進一步將土地和橋的示意圖抽象，用四點代表四塊土地，一些點對之間的曲線（邊）代表橋，如圖1右邊所示。七橋問題於是變成，是否可以從某一點開始，沿著邊走到另一點，再沿著另一條邊走到另一點，依此類推，目的是要將每一條邊都恰好走過一次。

歐拉的思考不只在七橋的特殊情況，他考慮一般的圖。對於圖中的每一點  $v$ ，定義其度數  $d(v)$  為與  $v$  相鄰的邊數，如圖1中的  $d(A) = d(C) = d(D) = 3$  且  $d(B) = 5$ ，當我們將圖中的所有點的度數加起來時，每加一個點的度數，我們順便將與他相鄰的邊做一個記號，所以度的總和就是記號的數目；但是因為每一條邊恰有兩個端點，所以會得到兩個記號，因此歐拉得到下面的公式：

$$\sum_v d(v) = 2m$$

其中  $m$  是邊的數目。以上的這個證明方法就是所謂的雙重計數法 (double counting)，是十分有用的基礎手段。由度數和的公式，我們知道，度數為奇數的點有偶數個，如圖1的圖就有四個奇度點。

歐拉說明七橋問題沒有解的方法如下。假如存在一個從  $x$  到  $y$  的走法 (如今在圖論上稱為道路)，如果  $z$  有異於  $x$  和  $y$ ，則當我們借由某一條邊走進  $z$  之後，必借由另一邊走出  $z$  到另外一點，因此，和  $z$  相鄰的邊必然成對出現，得知  $d(z)$  是偶數。但是圖1的四個點，都是奇點，所以是不可能的。

歐拉的論文比較大的篇幅是在討論反方向。它說明了，只要圖是連通而且各個點的度都是偶數，那麼一定可以從任意點出發，沿著點邊的走法，走出一條道路，並且每一條邊只用到恰好一次，最後回到原來出發的點。<sup>3</sup>

<sup>3</sup>詳細閱讀歐拉的論文，可以發現，其實他的論證略有不完備，但要將它改正卻也不困難。因此，現在人們還是將此定理歸功於他，並且將這樣的路徑以他命名，稱為歐拉路徑。

如果連通圖有  $2k$  個奇點，則將其兩兩配對，以這些點為端點加上  $k$  條新的邊，成爲一個只有偶點的連通圖，因此，存在一條將每邊恰走過一次又回到原出發點的道路；再將新加入的  $k$  條邊拆除，會變成  $k$  條道路。所以七橋問題中其實是要走兩段道路，而不能由某地出發將每座橋恰走過一次，到達另一處。

### 3. König 的第一本書

從 1736 年到 1936 年這兩百年間，可以說是圖論的春秋戰國時代，不同領域的研究人員在他們各自的崗位上，以不同的名稱，不同的內容，探索與歐拉發現的圖一樣的概念（參見 [2]）。一直到 1936 年，König 撰寫了圖論的第一本書 [3]，圖論在數學上於是有了正式的定位。從 1936 到現在不到一百年，圖論的發展迅速，各種理論及應用，在數學及其他學科中都得到極多的肯定，相關的書籍成幾何級數增加。

爲了解釋方便，我們來定下一些的基本用語。所謂圖是指一有序對  $G = (V, E)$ ，其中  $V$  是非空的有限集，其元素稱爲（頂）點， $E$  是一些  $V$  的相異二元無序對的集合，即  $E \subseteq \{e : e \subseteq V, |e| = 2\}$  其元素稱爲邊。有的時候，我們用  $V(G)$  表示圖  $G$  的點集，而  $E(G)$  表示圖  $G$  的邊集。方便起見，我們常將一條邊  $e = \{u, v\}$  直接寫成  $uv$ ，因此  $uv$  和  $vu$  是相同的。此時，我們說  $u$  和  $v$  是  $e$  的端點，也說  $e$  和  $u$ （及  $v$ ）相連，並說  $u$  和  $v$  相鄰，或者說  $u$  是  $v$  的鄰居，而用  $N(v)$  表示  $v$  的所有鄰居所構成的集合。

爲了視覺上的方便，我們常常將一個圖具體地劃出來，如圖 2 表示  $V = \{a, b, c, d, e\}$  及  $E = \{ab, ae, bc, be, cd, de\}$  的圖。如果圖中點的名稱暫時不重要時，我們也可能不將它們標出來，一直等到有需要的時候再來標示，如果只有少數點的名字必須用到，我們也可能只標示出那些點的名字。

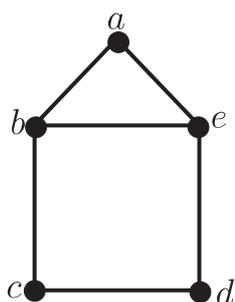


圖2: 一個有5個點及6條邊的圖。

圖的定義也可以有種種變化。如果我們允許兩點之間可以不只連一條邊，就可以產生有重邊的重圖；如果我們允許一條邊的兩端點相同，就產生有迴邊的近圖；如果我們允許圖

的邊有方向 (此時  $(u, v) = uv$  和  $(v, u) = vu$  視為不同), 就產生有向圖; 如果我們允許  $V(G)$  為無窮集合, 就產生無窮圖。

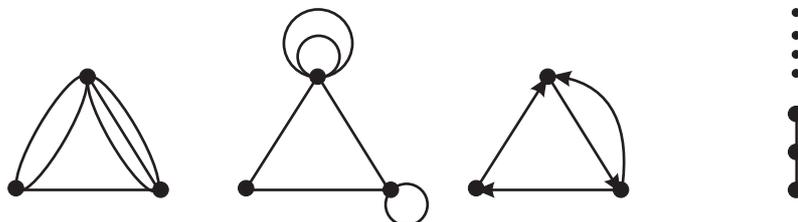


圖3: 重圖、近圖、有向圖及無窮圖之例。

一個圖中的一條道路是指一條點邊相間的序列  $v_0e_1v_1e_2\cdots e_kv_k$  其中的  $v_{i-1}$  和  $v_i$  是  $e_i$  的端點;  $v_0$  稱為此道路的起點、 $v_k$  為終點、 $k$  為長; 滿足  $v_0 = v_k$  的道路稱為封閉道路, 滿足  $v_0 \neq v_k$  的道路稱為開放道路。如果一個圖沒有重邊或迴圈,  $e_i$  就被  $v_{i-1}$  和  $v_i$  完全決定, 因此我們可以用  $v_0v_1\cdots v_k$  表示道路。一條行跡是指邊不重複的道路, 而一條路徑是指點不重複的道路, 一條歐拉迴路是指一條將每一條邊恰用一次的封閉行跡。一個圖是連通的, 如果任何兩點之間均有一條道路。歸結來說, 歐拉的定理如下所述。

**定理 (歐拉).** 如果  $G$  沒有度為 0 的點, 則  $G$  存在歐拉迴路若且唯若  $G$  是連通的而且其中每一點均有偶度數。

一個圖稱為二部圖 (bipartite graph), 如果其頂點集可以分割成  $A$  和  $B$ , 使得圖中每一條邊恰有一端點在  $A$ 、另一端點在  $B$ 。圖的一個配對是指一邊集, 其中每兩條邊都沒有共同端點。二部圖配對的研究是二十世紀初流行的議題, König 當年就是著迷於此, 對圖論大感興趣, 才會寫下圖論的第一本書, 其中二部圖配對佔了不少篇幅。而著名的匈牙利算法就是 König 和 Egerváry 用演算法的觀點求二部圖中最大配對的方法, 參見 [4, 5]。

## 4. 圖的點著色

圖的著色源自於十九世紀中葉英國的一位學生 Francis Guthrie (後來成為南非大學數學教授) 提出的平面圖四著色問題, 這個問題歷經一百多年的研究, 產生了不少研究方向和工具, 最後在 1977 年時由 Appel、Haken 和 Koch [6, 7] 藉由電腦的幫助, 透過「放電論證法」證明了四色定理。他們的方法依賴電腦的大量計算, 很難讓數學家們都滿意, 因此至今仍有人還在繼續努力, 希望能找到一個簡潔而「可閱讀」的證明。正如同當時人們的評

語所說的：「一個好的數學證明應該像一首詩，而這根本是電話簿。」雖然他們的證明後來被 Robertsen、Sanders、Seymour 和 Thomas 四人 [8] 簡化，不過還是不能避免利用到電腦來驗證。

我們著眼於圖的著色，不在四色定理而在其有許多的實際應用，諸如排時、排序、時間表、頻道分配、資源分配、實驗設計等等議題，都可以借由圖的著色來解決。

一個圖  $G$  的正常  $k$ -著色是指一函數  $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  使得兩點  $x$  和  $y$  相鄰時恆有  $f(x) \neq f(y)$ 。圖  $G$  的著色數  $\chi(G)$  是存在正常  $k$ -著色的最小  $k$  值。圖 2 中的五個點的圖  $G$  可以用  $f(a) = f(c) = 1$ 、 $f(b) = f(d) = 2$ 、 $f(e) = 3$  著色，所以  $\chi(G) \leq 3$ ；事實上  $\chi(G) = 3$ ，因為  $a$ 、 $b$ 、 $e$  三個點要著不同顏色。

圖  $G$  的一個獨立集 (點團) 是指一集合  $S \subseteq V(G)$ ，其中的任意相異兩點均不相鄰 (相鄰)，而圖  $G$  的獨立數  $\alpha(G)$  (點團數  $\omega(G)$ ) 是指獨立集 (點團集) 的最多點數。由正常  $k$ -著色  $f$  的定義可以知道， $f^{-1}(i) = \{x \in V(G) : f(x) = i\}$  是一個獨立集， $i = 1, 2, \dots, k$ 。所以著色數  $\chi(G)$  其實也是可以將  $V(G)$  分割成最少的獨立集的個數，其中每一個獨立集  $f^{-1}(i)$  稱為一個色類。

著色之所以可以有廣泛的運用，是因為很多應用實際上是要將一些物件分割成具有某性質的子類，如果我們將這些物件視為一個圖的點集，將不具特定性質的兩物件連邊，常常可以將問題化為圖著色。今舉一例說明如下。

某大學有  $n$  門課同時要開設，第  $i$  門課的開設時段為  $[a_i, b_i]$  區間，教務處的任務是要將這些課程排出來，利用越少的教室越好，當然，時段重疊的兩門課要排在不同的教室。我們可以造一個圖  $G$ ，其頂點集  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  表示這  $n$  門課，其邊集表達課的衝突性，即  $E(G) = \{v_i v_j : i \neq j \text{ 且 } [a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \emptyset\}$ 。如果將可以排用同一教室的兩門課著同色，就是一個正常著色，所以  $\chi(G)$  其實就是要求的教室的最少間數。

上述利用實數軸上的區間定義出來的圖稱為區間圖，求區間圖的著色數在 1960 年代是很熱門的話題。

## 5. 完美圖起源

我們先來看看如何求區間圖的著色數，如果區間圖  $G$  的頂點  $v_i$  對應的區間為  $[a_i, b_i]$ ，為了方便起見，假設  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ 。

我們利用貪求法將  $G$  著色： $i$  從 1 到  $n$  逐一將  $v_i$  著為「沒有被  $j < i$  而  $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \emptyset$  的  $v_j$  用到的最小正整數。」

由上述的著色方法可以看出這是一個正常著色。假設總共用到  $k$  色, 我們將用對偶方法證明, 其實  $\chi(G) = k$ 。首先, 對於任意圖  $G$  我們恆有弱對偶不等式:

$$\omega(G) \leq \chi(G),$$

這是因為  $G$  中的任意點團中的相異點都要用不同的顏色去著。回到區間圖的著色, 如果  $v_i$  用了第  $k$  色, 之所以如此, 是因為存在  $j_1, j_2, \dots, j_{k-1}$  小於  $i$ , 使得  $v_{j_r}$  用了第  $r$  色 ( $1 \leq r \leq k-1$ ), 而且  $[a_{j_r}, b_{j_r}]$  和  $[a_i, b_i]$  相交, 但是  $j_r < i$  表示  $a_{j_r} \leq a_i$ , 因而  $[a_{j_r}, b_{j_r}]$  包含點  $a_i$ , 這表示  $\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{k-1}}, v_i\}$  是一個  $k$  點的點團, 因此

$$k \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq k,$$

所以證明了  $\omega(G) = \chi(G) = k$ 。

會有上述的好結果, 本質上是  $G$  具有  $\omega(G) = \chi(G)$  這樣「完美」的性質, 這在下述 Shannon 的工作中會再度出現。雖然如此, Berge 在 1960 年代在定義  $G$  的完美性時卻有更強的要求。一個圖  $G$  稱為完美圖 (perfect graph), 如果對其任意導出子圖  $H$  均有  $\omega(H) = \chi(H)$ 。  $H$  是  $G$  的導出子圖指的是  $V(H) \subseteq V(G)$  且  $E(H) = \{xy \in E(G) : x, y \in V(H)\}$ 。Berge 這樣定義是因為縱使  $\omega(G) = \chi(G)$ , 它可能也是一個內部包含架構很差的圖。舉例來說, 不管  $H$  是什麼圖, 如果他有  $n$  點, 則考慮  $G = H \cup K_n$  時, 都會有  $\omega(G) = \chi(G) = n$ 。

早年在考慮完美圖時, 除了  $\omega$  和  $\chi$  這對參數之外, 人們也考慮  $\alpha$  和  $\theta$ , 其中  $\theta(G)$  是指將  $G$  的點集分割成最少的點團的個數。因為  $G$  中的獨立集 (點團) 在  $G$  的補圖  $G^c$  中是點團 (獨立集), 所以

$$\alpha(G) = \omega(G^c) \text{ 且 } \theta(G) = \chi(G^c)$$

或者是

$$\omega(G) = \alpha(G^c) \text{ 且 } \chi(G) = \theta(G^c)。$$

所以, 研究  $\omega$  和  $\chi$  其實等同在補圖研究  $\alpha$  和  $\theta$ 。以下 Shannon 的工作是用  $\alpha$  和  $\theta$  描述的。

Shannon [9] 在 1956 年研究零錯信息傳輸, 他希望傳輸的信息都要不混淆。假設我們有一符號集  $V$ , 我們可以造一圖  $G$ , 以  $V$  為點集, 而其邊集  $E = \{xy : x \text{ 和 } y \text{ 造成混淆}\}$ 。兩條長度為  $m$  的信息  $x_1x_2 \cdots x_m$  和  $y_1y_2 \cdots y_m$  不混淆是指對某一個  $i$  有  $x_i = y_i$  且  $x_i$  和  $y_i$  不混淆。目標是固定  $m$  之後, 想要找一包含兩兩不混淆的長度為  $m$  的信息集合。一個簡單的方法是找一大小為  $\alpha(G)$  的獨立集  $S$ , 則

$$\{x_1x_2 \cdots x_m : x_i \in S\}$$

是一個大小為  $\alpha(G)^m$  的信息集。問題是，能不能做得更好？

答案是，有時確實可以做得更好，以  $G = C_5$  為例子，此時  $V(C_5) = \{a, b, c, d, e\}$  且  $E(C_5) = \{ab, bc, cd, de, ea\}$ ，是為五邊形圖。易知  $\alpha(C_5) = 2$ ，因此上述的造法得到大小為  $2^m$  的不混淆信息集。但是我們可以考慮這樣的集合，對於每一個奇數  $i$ ， $x_i x_{i+1}$  是取自  $\{aa, bc, ce, db, ed\}$  有五種取法，這樣會造成一大小為  $5^{\lfloor m/2 \rfloor}$  的不混淆信息集，這遠比  $2^m$  大很多。

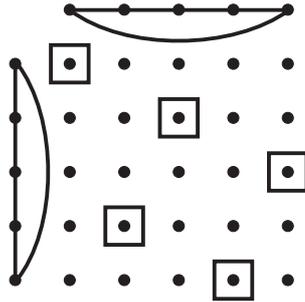


圖4:  $x_i x_{i+1}$  取自  $\{aa, bc, ce, db, ed\}$  有五種取法。

為了簡化敘述，我們來定義圖的強乘積 (strong product)。如果  $G$  和  $H$  是兩圖，其強乘積  $G \otimes H$  的頂點集  $V(G \otimes H) = V(G) \times V(H)$ ，而邊集  $E(G \otimes H) = \{(x, y)(x', y') : (x = x' \text{ 或 } xx' \in E(G)) \text{ 且 } (y = y' \text{ 或 } yy' \in E(H))\}$ 。

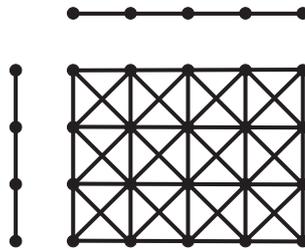


圖5:  $P_4 \otimes P_5$ 。

當  $m$  是正整數時， $G^m = G \otimes G \otimes \dots \otimes G$  (共  $m$  次)。因此，Shannon 所要求的數其實就是  $\alpha(G^m)$ 。因為對任意  $G$  和  $H$  恆有

$$\alpha(G \otimes H) \geq \alpha(G) \cdot \alpha(H),$$

我們得知  $\alpha(G^m) \geq \alpha(G)^m$ 。前述  $G = C_5$  的例子中  $\alpha(C_5^m) \geq \alpha(C_5)^m = 2^m$ ，當然後來我們更進一步知道  $\alpha(C_5^m) \geq 5^{\lfloor m/2 \rfloor}$ 。一般而言， $\alpha(G^m)$  都是指數成長，為了方

便, 我們考慮  $\alpha(G^m)^{1/m}$ , 而當  $m \rightarrow \infty$ , 其極限總是存在<sup>4</sup>, 於是就可以定義  $\psi(G) = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha(G^m)^{1/m}$ , 我們稱它為 Shannon 容量 (Shannon capacity)。回到上述的  $C_5$ , 到底  $\psi(C_5)$  是多少? 我們已經知道  $\psi(C_5) \geq \sqrt{5}$  了。

在討論 Lovász 證明  $\psi(C_5) = \sqrt{5}$  之前, 讓我們回到完美圖。首先,  $\omega$  和  $\chi$  之間的弱完美不等式  $\chi(G) \geq \omega(G)$  一樣, 我們也有  $\theta(G) \geq \alpha(G)$ , 因此, 再加上一些推導就有

$$\alpha(G)\alpha(H) \leq \alpha(G \otimes H) \leq \theta(G \otimes H) \leq \theta(G)\theta(H),$$

更一般而言,  $\alpha(G)^m \leq \alpha(G^m) \leq \theta(G^m) \leq \theta(G)^m$  或者  $\alpha(G) \leq \alpha(G^m)^{1/m} \leq \theta(G^m)^{1/m} \leq \theta(G)$ 。如果  $\alpha(G) = \theta(G)$ , 我們就可以得到  $\psi(G) = \alpha(G)$  這樣好的公式。這其實也是當年 Berge 他們急於問, 何時  $\alpha(G) = \theta(G)$  的原因。但如同前面所提, 一般是要  $\alpha(H) = \theta(H)$  對  $G$  所有導出圖  $H$  都成立比較容易說。

因為  $G$  的  $\omega$  和  $\chi$  關係等同於其補圖  $G^c$  的  $\alpha$  和  $\theta$  的關係, 我們事實上, 是在研究  $G$  的完美性和  $G^c$  的完美性。第一個非完美的最小圖是  $C_5$ , 這也是為何  $\psi(C_5) \geq \sqrt{5} > 2 = \alpha(C_5)$  的原因。在研究完美圖的過程, Berge 發現  $G$  和  $G^c$  中只要有一個是完美圖, 另一個也是, 例如區間圖就如此; 完美圖不能有  $C_{2k+1}$  和  $C_{2k+1}^c$  ( $k \geq 2$ ) 為其導出子圖, 而似乎反過來也成立。因此他寫下了兩個著名的猜測:

(C1) 圖  $G$  為完美圖若且唯若 其補圖  $G^c$  為完美圖。

(C2) 圖  $G$  為完美圖若且唯若  $G$  不含  $C_{2k+1}$  及  $C_{2k+1}^c$  ( $k \geq 2$ ) 為導出子圖。

其中 (C2) 如果對的話, 可以推得 (C1) 也對, 所以 (C1) 也被稱為完美圖弱猜測, 而 (C2) 就被稱為完美圖強猜測。完美圖弱猜測在 1972 年被 Lovász [7, 8] 證明出來, 這也是 Lovász 獲得 Wolf 獎的得獎理由之一, 然而完美圖強猜測則一直要等到 2006 年才被 Chundnovsky、Robertson、Seymour、Thomas 四人 [9] 證明出來。

## 6. Lovász 的巧思

現在讓我們來談談 Lovász 如何算  $\psi(C_5)$  的方法。對於  $\mathbb{R}^n$  中的向量  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  及  $\mathbb{R}^m$  中的向量  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ , 我們用  $x \circ v$  來表示他們的張量積 (tensor product), 它是一個  $\mathbb{R}^{mn}$  中的向量  $(x_1v_1, x_2v_1, \dots, x_nv_1, x_1v_2, x_2v_2, \dots, x_nv_2, \dots, x_1v_m, x_2v_m, \dots, x_nv_m)$ 。我們用  $\langle x, y \rangle$  表示  $\mathbb{R}^m$  中的兩個向量  $x$  和  $y$  的內積 (inner

<sup>4</sup>一般來說, 如果函數  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  滿足  $f(m+n) \geq f(m)f(n)$  對任意  $m, n \in \mathbb{N}$  恆成立, 則  $\lim_{m \rightarrow \infty} f(n)^{1/n}$  存在。這是著名的 Fekete 引理。

product), 也就是  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ 。此時對於  $\mathbb{R}^n$  中的向量  $x$  和  $y$ , 以及  $\mathbb{R}^m$  中的向量  $v$  和  $w$ , 我們恆有

$$(x \circ v, y \circ w) = \langle x, y \rangle \cdot \langle v, w \rangle \quad (*)$$

假如圖  $G$  的頂點集  $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ 。我們稱  $G$  的一個標準正交代表 (orthonormal representation) 是一組歐式空間的單位向量  $(v^1, v^2, \dots, v^n)$ , 使得對於不相鄰的  $i$  和  $j$  必有  $v^i$  和  $v^j$  垂直。顯然, 取一組兩兩互相垂直的單位向量是任意  $n$  點圖的標準正交基底, 所以這樣的代表總是存在的。由式子 (\*) 顯然有:

**引理 1.** 如果  $(u^1, u^2, \dots, u^n)$  和  $(v^1, v^2, \dots, v^n)$  分別是  $G$  和  $H$  的標準正交代表, 則所有  $u^i \circ v^j$  將形成  $G \otimes H$  的一個標準正交代表。

定義一個標準正交代表  $(u^1, u^2, \dots, u^n)$  的值 (value) 為

$$\min_c \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\langle c, u^i \rangle^2}$$

其中  $c$  遍歷所有單位向量, 而當中達到最小值的那個  $c$  稱爲此代表的柄 (handle)。我們用  $\phi(G)$  表示  $G$  的所有標準正交代表的值當中最小的值, 並稱那個達到最小值的代表爲最佳代表 (optimal representation)。

**引理 2.**  $\phi(G \otimes H) \leq \phi(G)\phi(H)$ 。

**證明:** 設  $(u^1, u^2, \dots, u^n)$  和  $(v^1, v^2, \dots, v^n)$  分別爲  $G$  和  $H$  的最佳代表, 其柄分別爲  $c$  和  $d$ 。由式 (\*) 知,  $c \circ d$  爲單位向量, 再套用式子 (\*), 可知

$$\phi(G \otimes H) \leq \max_{i,j} \frac{1}{\langle c \circ d, u^i \circ v^j \rangle^2} = \max_{i,j} \frac{1}{\langle c, u^i \rangle^2 \langle d, v^j \rangle^2} = \phi(G)\phi(H)。 \quad \square$$

**引理 3.**  $\psi(G) \leq \phi(G)$ 。

**證明:** 我們首先證明  $\alpha(G) \leq \phi(G)$ 。令  $(u^1, u^2, \dots, u^n)$  是  $G$  的一個帶柄  $c$  的最佳標準正交代表。不失一般性假設  $\{1, 2, \dots, k\}$  是  $G$  中的一個最大獨立集,  $u^1, u^2, \dots, u^n$  兩兩垂直, 所以

$$1 = \|c\|^2 \geq \sum_{i=1}^k \langle c, u^i \rangle^2 \geq \frac{\alpha(G)}{\phi(G)},$$

由此以及引理 2 可知  $\alpha(G^n) \leq \phi(G^n) \leq \phi(G)^n$ , 開  $n$  次方取極限便可以得到引理。  $\square$

有了上述的基礎, 我們便能來看 Lovász 對於  $\psi(G) = \sqrt{5}$  的精彩證明。考慮一把傘 (是的, 雨傘, 現實生活中的那個), 其傘柄跟傘骨均爲單位長, 而傘骨有五根, 並想像傘的頂

端位於三維空間中的原點  $O(0,0,0)$ , 傘柄的一端在  $(0,0,1)$ , 而五根傘骨的一端  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  在傘是合著的時候, 也是在  $(0,0,1)$ 。當我們打開這把傘的時候  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  落在三維空間的平面  $z = \sqrt{1-r^2}$  中以  $(0, 0, \sqrt{1-r^2})$  為圓心及  $r$  為半徑的圓上, 形成一個正五邊形。 $r$  從 0 逐漸增大到最多為 1 就是打開傘的過程。當半徑為  $r$  時, 正五邊形的邊長為  $2r \sin 36^\circ$ , 而不相鄰的  $A_i$  和  $A_j$  (例如  $A_1$  和  $A_3$ ) 之間的距離為  $2r \sin 72^\circ$ , 所以傘骨  $OA_i$  和  $OA_j$  形成邊長為 1、 $1, 2r \sin 72^\circ$  的等腰三角形, 由畢氏定理得知  $OA_i$  和  $OA_j$  的夾角在  $2r \sin 72^\circ = \sqrt{2}$  時為直角, 也就是說, 傘打開到  $r = \csc 72^\circ / \sqrt{2} \approx 0.7435$  時, 不相鄰的骨之間的夾角恰為直角, 此時我們就把傘柄對應的向量當作  $c$ , 而傘骨對應的向量  $u^1, u^2, u^3, u^4, u^5$  就會是  $C_5$  一組標準正交代表。可以計算  $\langle c, u^i \rangle = 5^{-1/4}$ , 從而  $\psi(C_5) \leq \phi(C_5) \leq \sqrt{5}$ , 故得到  $\psi(G) = \sqrt{5}$ 。

## 參考文獻

1. L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitance*, Vol. 8 (1736), pp.128-140.
2. N. B. Biggs, E. K. Lloyd and R. J. Wilson, *Graph Theory*, 1736-1936, Clarendon Press, Oxford 1998.
3. D. König, Theory of Finite and Infinite Graphs, translated by R. Mcloart with commentary by W. T. Tutte, Birkhäuser, Boston, 1990. (Originally published as Theorie des Endlichen und Unendlichen Graphen, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1936. German Edition 1986.)
4. 王子俠, 相異代表系統簡介, 數學傳播, 第四卷第四期 (民國69年12月), 8-12頁。
5. 張鎮華, 相異代表系古今談, 數學傳播, 第十卷第一期 (民國95年2月), 53-59頁。
6. K. Appel and W. Haken, Every planar map is four colorable, Part I, Discharging, *Illinois J. Math.*, Vol. 21 (1977), pp. 429-490.
7. K. Appel, W. Haken and J. Koch, Every planar map is four colorable, Part II, Reducibility, *Illinois J. Math.*, Vol. 21 (1977), pp.491-567.
8. N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, The four-colour theorem, *J. Combin. Theory*, Ser. B, Vol. 70 (1997), pp.2-44.
9. C. E. Shannon, The zero error capacity of a noisy channel, *IRE Trans. Inform. Theory* IT-2 (1956), pp.8-19.
10. L. Lovász, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, *Discrete Math.*, Vol. 2 (1972), pp.253-257.
11. L. Lovász, A characterization of perfect graphs, *J. Combin. Theory*, Ser. B, Vol. 13 (1972), pp.95-98.
12. M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, The strong perfect graph theorem, *Ann. Math.*, Ser. 2, Vol. 164 (2006), pp.51-229.

