數學傳播 36卷2期, pp. 64-69

賭戲公平賠率漸近性質的探討
Lambert W 函數的一個應用實例

蘇柏奇

摘要: 本文提供一個中學生可以瞭解的賭戲情境, 透過期望值之計算, 採用觀察、推測、驗證及一般化的策略, 來求出一個賭局的公平賠率及公平顆數。進而藉助於電腦套裝軟體 Maple 所提供計算能力的協助, 來探討公平顆數與骰子面數之比值的漸近性質。在解決問題的過程中, 意外的涉及了 Lambert W 函數, 因其並非初等函數, 提供中學生一個結合資訊科技和網路資源, 以擴展其數學能力的具體實例。

1. 從民間的一個骰子賭戲說起

1.1. 投擲 3 顆 6 面骰子之賭戲

民間有一個常見的骰子賭戲, 賭戲進行時, 檯面上有 3×2 的六格方陣, 其上分別有 1∼6 點的圖像, 賭客將賭金放至格子內來下注, 下注完畢, 莊家一次投擲三顆骰子, 接著便依照所擲出的點數來計算輸贏。出現一顆的點數, 莊家賠給下注者下注金額的一倍, 同理, 兩顆則賠兩倍, 三顆則賠三倍, 而未出現的點數之押金則全歸莊家所有。爲什麼莊家採用投擲三顆六面骰子的模式呢?

六種點數中, 無論押哪一個點數, 輸贏並無差別, 不妨假設押1點1元, 計有:「沒有出現1點, 賠1元」、「恰出現一個1點, 賺1元」、「恰出現兩個1點, 賺2元」及「恰出現三個1點, 賺3元」等四種情形, 其期望值約爲 -0.0787。依照相同規則, 投擲兩顆或四顆骰子的期望值分別約爲 -0.3611 及 0.1844。從期望值看來, 投擲三顆骰子雖然稍有利於莊家, 但不失爲最接近公平的方式。若將期望值爲 0 的骰子顆數稱爲「公平顆數」, 但此賭戲的公平顆數是一個介於3、4之間的非整數, 因此民間的莊家通常採取三顆六面的模式。

若將出現所押點數一顆時, 所賠金額與押金的比值稱爲「賠率」(本賭戲之賠率即爲1), 並將期望值爲 0 的賠率稱爲「公平賠率」。民間擲三顆骰子賭戲之公平賠率爲何? 設賠率爲 t, 押 1

點 1 元, 若出現一個 1 點, 得 t 元; 兩個 1 點, 得 $2t$ 元; 三個 1 點, 得 $3t$ 元; 若未出現 1 點, 則損失 1 元。其期望值爲 $\dfrac{-125+108t}{216}$。當期望值爲 0 時, 得公平賠率爲 $t=\dfrac{125}{108}=1.157\ldots$。

1.2. 投擲 k 顆 n 面之骰子的賭戲

我們接著考慮一般的情形, 考慮「投擲 k 顆 n 面骰子 (點數分別爲 $1,2,\ldots,n$), 若出現所押點數 a 顆 $(a>0)$, 則獲得押金的 at 倍; 若未出現所押點數, 則沒收押金」之賭戲, 試問公平賠率 t 爲何? 假設押 1 點 1 元, 輸贏情況如下:

出現 1 點之骰子數	出現 1 點骰子之排列數	其它點數骰子之排列數	輸贏金額
0	C_0^k	$(n-1)^k$	-1
1	C_1^k	$(n-1)^{k-1}$	t
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	C_k^k	$(n-1)^{k-k}$	kt

其期望值爲

$$\frac{C_0^k\times(n-1)^k\times(-1)}{n^k}+\cdots+\frac{C_i^k\times(n-1)^{k-i}\times it}{n^k}+\cdots+\frac{C_k^k\times(n-1)^{k-k}\times kt}{n^k}$$
$$=\frac{-(n-1)^k+t\sum_{i=1}^k C_i^k\times(n-1)^{k-i}\times i}{n^k}$$

當期望值爲 0 時, 得公平賠率

$$t=\frac{(n-1)^k}{\displaystyle\sum_{i=1}^k C_i^k\times(n-1)^{k-i}\times i} \tag{1}$$

式中分母 $\displaystyle\sum_{i=1}^k C_i^k\times(n-1)^{k-i}\times i=\sum_{i=1}^k k\times C_{i-1}^{k-1}\times(n-1)^{k-i}$。當令 $j=i-1$ 時, 左式可化簡爲

$$k\times\sum_{j=0}^{k-1} C_j^{k-1}\times(n-1)^{(k-1)-j}=k\times n^{k-1}$$

代入 (1), 得公平賠率

$$t=\frac{(n-1)^k}{kn^{k-1}} \tag{2}$$

我們將在下一節探討若放寬顆數須爲整數的限制時, 民間賭戲的公平顆數的相關問題。

2. 利用 Maple 求解公平顆數

若放寬顆數須爲整數的限制, 則民間賭戲的公平顆數爲何? 將 $t=1$、$n=6$ 代入 (2), 則公平顆數即爲 $5^k - k6^{k-1} = 0$ 的解。利用 Maple 求解, 得 k 值:

```
> fsolve(5^x-x*6^(x-1)=0,x);
                              3.292126772
```

接著利用 Maple 分別計算 $n=10$ 及 $n=1,000$ 時之骰子的公平顆數。

```
> fsolve(9^x-x*10^(x-1)=0,x);
                              5.564147008
> fsolve(999^x-x*1000^(x-1)=0,x);
                              567.0406229
```

將 $n=6$、10、50、150、200、400、900、1,000 之公平顆數列表如下,

n	k	k/n
6	3.29212677	0.5486877953
10	5.56414701	0.5564147008
50	28.2536524	0.5650730472
150	84.9685761	0.5664571741
200	113.325814	0.5666290715
400	226.754583	0.5668864568
900	510.326289	0.5670292100
1000	567.040623	0.5670406229

從中不難發現 k/n 的值都相當接近。於是我們大膽猜測: 當 n 越來越大時, k/n 將會趨近於某一個定值。我們將觀察以 n 爲變數的函數 $s=k/n$ 的漸近性質。將 $k=sn$ 及 $t=1$ 代入 (2), 化簡得 $\dfrac{(n-1)^{sn}}{n^{sn}} = s$, 再化簡得

$$(1-\frac{1}{n})^n = s^{\frac{1}{s}} \tag{3}$$

我們再利用 Maple, 分別計算 $n=10,000$、$n=100,000$ 及 $n=1,000,000$ 時, 所對應的 s 值。

```
> fsolve((1-1/10000)^10000=s^(1/s),s);
                                0.5671330276
> fsolve((1-1/100000)^100000=s^(1/s),s);
                                0.5671422642
> fsolve((1-1/1000000)^1000000=s^(1/s),s);
                                0.5671431878
```

將三種面數之 s 值列表如下,

n	s
10,000	0.5671330276
100,000	0.5671422642
1,000,000	0.5671431878

我們相信當 n 越來越大時, s 會趨近於一個定值。中學階段的數學工具不足以求出 s 來, 我們再次利用 Maple 來求解 (3)

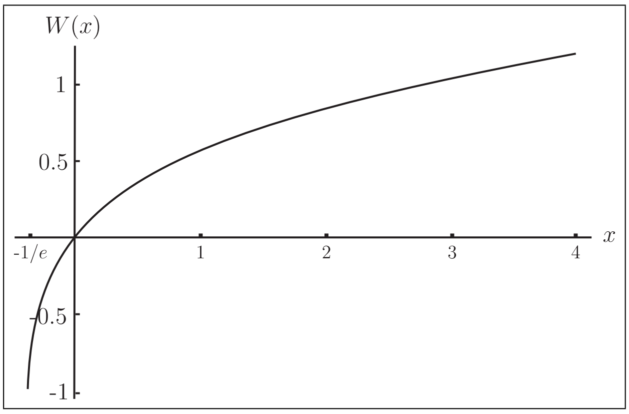
```
> solve((1-1/n)^n=s^(1/s),s);
```

得到

$$s = \frac{-\text{Lambert W}\Big(-n\ln(\frac{n-1}{n})\Big)}{n\ln(\frac{n-1}{n})} \tag{4}$$

式 4 中, Maple 利用 Lambert W 函數表出 s 的值來。

Lambert W 函數 (朗伯 W 函數), 又稱爲「歐米加函數」或「乘積對數」, 是複變函數 $f(z) = ze^z$ 的反函數。即對所有的複數 z, 可以得到 $W(z)e^{W(z)} = z$。事實上, Lambert W 函數是一個多值函數。若限制 W, x 爲實數, 則函數僅對於 $x \geq -1/e \approx -0.3678\cdots$ 有定義, 在區間 $(-1/e, 0)$ 內是多值的; 如果加上 $w \geq -1$ 的限制, 則定義了一個如下圖的單值函數 $W(x)$。



Lambert W 函數雖不能用初等函數來表示, 但在諸多領域有廣泛的運用, 例如它可以用來解許多含有指數的方程, 也出現在某些微分方程的解中; 在組合數學方面, 則運用於樹狀圖個數的計算。(以上資料, 引自維基百科) 我們則在前兩節中, 藉著投擲骰子的賭戲情境, 透過 Maple 計算上的協助, 也引出了 Lambert W 函數。

式 (4) 中, 利用 l'Hospital Rule, 得

$$\lim_{n\to\infty}\Big(-n\ln(\frac{n-1}{n})\Big)=1.$$

故得

$$\lim_{n\to\infty} s=\frac{\lim_{n\to\infty}\text{Lambert W}\Big(-n\ln(\frac{n-1}{n})\Big)}{\lim_{n\to\infty}\Big(-n\ln(\frac{n-1}{n})\Big)}=\text{Lambert W}(1).$$

查詢維基百科, 得 Lambert W(1) $=\Omega$, 利用 Maple 計算其近似值。

```
> evalf((LambertW(1)),60);
  0.567143290409783872999968662210355549753815787186512508135131
```

故得賠率爲 1 之賭戲, 當 n 夠大時, s 會趨近於 Ω。

4. 更進一步的分析

在成功的解出賠率爲 1 時, s 的值趨近於一個定數 Ω 之後, 我們再問賠率爲 t 時的 s 值是否也有類似的性質? 將 $k=ns$ 代入 (2), 化簡得 $st=(1-1/n)^{sn}$, 當 n 無限大時, 再化簡爲 $st=e^{-s}$, 得 $se^s=1/t$, 利用 Lambert W 函數, 即得

$$s=\text{Lambert W}(1/t) \tag{5}$$

不難得知, 給定骰子面數, 當賭局賠率越低時, 公平顆數就越高。但是否可能出現賠率很低, 而使得公平顆數幾乎與骰子面數相當, 甚或超過的狀況呢? 直覺上是有可能的, 但此時賠率爲何? 試求公平顆數等於骰子面數時的賠率, 將 $s = 1$ 代入 (5), 得 Lambert $\mathrm{W}(1/t) = 1$, 因爲 Lambert $\mathrm{W}(e) = 1$,

故得當 n 無限大時, $t = e^{-1} = 0.3678\cdots$。

參考文獻

1. 維基百科: Lambert W 函數、Ω 常數。

—本文作者任教苗栗縣立興華高中—