數學傳播 36卷4期, pp. 39-41

在 99 課綱中談相關係數 $-1 \le r \le 1$

唐柏寧

筆者任教於高中幾年, 經歷教科書種種變革, 自舊課綱、95暫綱、99課綱, 而數學科的內容變化幅度以99課綱最爲明顯, 主因是在單元順序的調整, 以致教學現場面臨一些以往沒有的問題, 例如: 自編教材的數學歸納法單元中, 例題

$$「試以數學歸納法證明 \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}」。$$

因單元調整使得 $\sum$ 的介紹出現在歸納法之後, 這樣的題目因缺乏 $\sum$ 先備知識, 而必須移除或修改。

在不同單元性質的證明, 也面臨這樣的問題, 教學上的證明方法或補充給學生的知識也必須進行修改或刪除, 如相關係數的性質 $-1 \le r \le 1$ 在新課綱中有提到, 但來源與證明課本往往省略不談, 學生對此提出疑問時, 站在第一線的教師仍不得不面對如此問題, 因此筆者提供高一下相關係數的性質 $-1 \le r \le 1$ 如何說明給高一學生, 供各位先進做爲參考。

以下兩點爲課本中已提到, 高一生之先備知識

1. 數據標準化:

令 x_i 表第 i 筆原數據, μ 表原數據的平均數, σ 表原數據的標準差, 則 $x_i'=\dfrac{x_i-\mu}{\sigma}$, x_i' 即第 i 筆標準化後新數據, 此時 $x_i'=\dfrac{1}{\sigma}x_i-\dfrac{\mu}{\sigma}$, 故新的平均數 $\mu'=\dfrac{1}{\sigma}\cdot\mu-\dfrac{\mu}{\sigma}=0$, 由定義 $\sigma^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}$ 可知 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=n\cdot\sigma^2$ 故 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x')^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\cdot n\cdot\sigma^2=n$ 得新的標準差 $\sigma'=\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x')^2}{n}}=\sqrt{\dfrac{n}{n}}=1$。

2.相關係數:

設有 n 對 (x_1,y_1), $(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$ 數據, 若將數據標準化爲 $(x'_i;y'_i)$, 則相關係數

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x'_iy'_i}{n}$$

若數據未標準化, 以變數 x,y 直接計算相關係數

$$\text{則 } r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x'_iy'_i}{n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\dfrac{x_i-u_x}{\sigma_x}\times\dfrac{y_i-u_y}{\sigma_y}\Big)}{n}=\frac{1}{n\sigma_x\sigma_y}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-u_y)$$

$$\begin{aligned}\text{且 } \sigma_x\sigma_y&=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}{n}}\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}{n}}\\&=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}\end{aligned}$$

故相關係數可表成

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-u_x)(y_i-u_y)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}}$$

下面針對不同課綱說明 $-1\le r\le 1$。

(1) 利用科西不等式證明 (適用舊課綱)

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(x'_i)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y'_i)^2\ge\Big(\sum_{i=1}^{n}x'_iy'_i\Big)^2\\&\frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}x'_iy'_i\Big)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x'_i)^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(y'_i)^2}\le 1\Rightarrow -1\le\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x'_iy'_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x'_i)^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y'_i)^2}}\le 1\\&\qquad\Rightarrow -1\le\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x'_iy'_i}{n}\le 1\end{aligned}$$

證明過程相當簡潔, 也容易理解, 因此在舊課綱教學中是慣用的證明方式。

(2) 新課綱可使用的證明

$$\begin{aligned}
\text{可利用}\quad & \sum_{i=1}^{n}(x_i' \pm y_i')^2 \ge 0 \\
& \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i')^2 \pm \sum_{i=1}^{n} 2x_i'y_i' + \sum_{i=1}^{n}(y_i')^2 \ge 0 \\
& \Rightarrow -\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i')^2\Big) \le \sum_{i=1}^{n} 2x_i'y_i' \le \sum_{i=1}^{n}(x_i')^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i')^2 \\
& \Rightarrow -2n \le 2\sum_{i=1}^{n} x_i'y_i' \le 2n \\
& \Rightarrow -1 \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i'y_i'}{n} \le 1
\end{aligned}$$

當 $r=1$ 等號成立時 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i'-y_i')^2=0 \Rightarrow y_i'=x_i'$, 即 $\dfrac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}=\dfrac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}$, 得 $(y_i-\mu_y)=\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x_i-\mu_x)$ 則原數據 x_i, y_i 皆在同一直線 $(y-\mu_y)=\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$ 上, 斜率 $\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ 爲正, 當 $r=-1$ 等號成立時 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i'+y_i')^2=0 \Rightarrow y_i'=-x_i'$, 即 $\dfrac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}=-\Big(\dfrac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}\Big)$, 得 $(y_i-\mu_y)=-\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x_i-\mu_x)$ 則原數據 x_i, y_i 皆在同一直線 $(y-\mu_y)=-\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$ 上, 斜率 $\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ 爲負。

99課綱的內容對教師仍有許多教學現場必須克服的問題, 筆者拋轉引玉, 以期科內彼此交流, 增進教學技巧, 對內容不完善的部分, 亦希望各位先進不吝指教。

—本文作者任教台南市立南寧高中—