數學傳播　40卷3期, pp. 83-84

一道不等式的再證

劉才華

命題: 若 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 爲滿足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$ 的正數, $\lambda \ge \dfrac{1}{n^2}$, 則

$$\Big(a_1+\frac{\lambda}{a_1}\Big)\Big(a_2+\frac{\lambda}{a_2}\Big)\cdots\Big(a_n+\frac{\lambda}{a_n}\Big)\ge\Big(\frac{1}{n}+n\lambda\Big)^n.$$

在 142 期的 [從 Cauchy 不等式的一種證法談起] 和 151 期的 [回響：一道不等式的另一種證法] 兩文中, 作者給出了兩種不同的證法, 這裡筆者採用「以直代曲」的思想, 給出一種新的證法。

證明: 首先證明, 當 $t>0$, $\lambda\ge\dfrac{1}{n^2}$ 時, 有

$$\ln\Big(t+\frac{\lambda}{t}\Big)\ge\frac{n-\lambda n^3}{1+\lambda n^2}\Big(t-\frac{1}{n}\Big)+\ln\Big(\frac{1}{n}+n\lambda\Big).$$

構造函數 $F(t)=\ln\Big(t+\dfrac{\lambda}{t}\Big)-\dfrac{n-\lambda n^3}{1+\lambda n^2}\Big(t-\dfrac{1}{n}\Big)-\ln\Big(\dfrac{1}{n}+n\lambda\Big)$ $(t>0)$, 則

$$F'(t)=\frac{t^2-\lambda}{t^3+\lambda t}-\frac{n-\lambda n^3}{1+\lambda n^2}=\frac{n(\lambda n^2-1)t^3+(\lambda n^2+1)t^2+\lambda n(\lambda n^2-1)t-\lambda-\lambda^2n^2}{(t^3+\lambda t)(\lambda n^2+1)}.$$

令 $G(t)=n(\lambda n^2-1)t^3+(\lambda n^2+1)t^2+\lambda n(\lambda n^2-1)t-\lambda-\lambda^2n^2$ $(t>0)$, 則

$$G'(t)=3n(\lambda n^2-1)t^2+2(\lambda n^2+1)t+\lambda n(\lambda n^2-1).$$

由 $t>0$ 和 $\lambda\ge\dfrac{1}{n^2}$ 得 $G'(t)>0$, 函數 $G(t)$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 上單調遞增。

又 $G\Big(\dfrac{1}{n}\Big)=0$ 可知: 當 $t\in\Big(0,\dfrac{1}{n}\Big)$ 時, $G(t)<0$, $F'(t)<0$, $F(t)$ 在 $t\in\Big(0,\dfrac{1}{n}\Big)$ 上單調遞減; 當 $t\in\Big(\dfrac{1}{n},+\infty\Big)$ 時, $G(t)>0$, $F'(t)>0$, $F(t)$ 在 $t\in\Big(\dfrac{1}{n},+\infty\Big)$ 上單調遞增。從而 $F(t)$ 的最小值 $F_{\min}(t)=F\Big(\dfrac{1}{n}\Big)=0$, 進而

$$\ln\Big(t+\frac{\lambda}{t}\Big)\ge\frac{n-\lambda n^3}{1+\lambda n^2}\Big(t-\frac{1}{n}\Big)+\ln\Big(\frac{1}{n}+n\lambda\Big).$$

於是

$$\ln\Big(a_1+\frac{\lambda}{a_1}\Big)+\ln\Big(a_2+\frac{\lambda}{a_2}\Big)+\cdots+\ln\Big(a_n+\frac{\lambda}{a_n}\Big)\geq\frac{n-\lambda n^3}{1+\lambda n^2}\Big[\sum_{i=1}^{n}a_i-1\Big]+n\ln\Big(\frac{1}{n}+n\lambda\Big),$$

則

$$\ln\Big[\Big(a_1+\frac{\lambda}{a_1}\Big)\Big(a_2+\frac{\lambda}{a_2}\Big)\cdots\Big(a_n+\frac{\lambda}{a_n}\Big)\Big]\geq\ln\Big(\frac{1}{n}+n\lambda\Big)^n,$$

故

$$\Big(a_1+\frac{\lambda}{a_1}\Big)\Big(a_2+\frac{\lambda}{a_2}\Big)\cdots\Big(a_n+\frac{\lambda}{a_n}\Big)\geq\Big(\frac{1}{n}+n\lambda\Big)^n.$$

—本文作者任教山東省泰安市甯陽縣第一中學—