

一道不等式的再證

劉才華

命題: 若 a_1, a_2, \dots, a_n 為滿足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 的正數, $\lambda \geq \frac{1}{n^2}$, 則

$$\left(a_1 + \frac{\lambda}{a_1}\right) \left(a_2 + \frac{\lambda}{a_2}\right) \cdots \left(a_n + \frac{\lambda}{a_n}\right) \geq \left(\frac{1}{n} + n\lambda\right)^n.$$

在 142 期的 [從 Cauchy 不等式的一種證法談起] 和 151 期的 [回響：一道不等式的另一種證法] 兩文中, 作者給出了兩種不同的證法, 這裡筆者採用「以直代曲」的思想, 給出一種新的證法。

證明: 首先證明, 當 $t > 0$, $\lambda \geq \frac{1}{n^2}$ 時, 有

$$\ln\left(t + \frac{\lambda}{t}\right) \geq \frac{n - \lambda n^3}{1 + \lambda n^2} \left(t - \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n} + n\lambda\right).$$

構造函數 $F(t) = \ln\left(t + \frac{\lambda}{t}\right) - \frac{n - \lambda n^3}{1 + \lambda n^2} \left(t - \frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n} + n\lambda\right)$ ($t > 0$), 則

$$F'(t) = \frac{t^2 - \lambda}{t^3 + \lambda t} - \frac{n - \lambda n^3}{1 + \lambda n^2} = \frac{n(\lambda n^2 - 1)t^3 + (\lambda n^2 + 1)t^2 + \lambda n(\lambda n^2 - 1)t - \lambda - \lambda^2 n^2}{(t^3 + \lambda t)(\lambda n^2 + 1)}.$$

令 $G(t) = n(\lambda n^2 - 1)t^3 + (\lambda n^2 + 1)t^2 + \lambda n(\lambda n^2 - 1)t - \lambda - \lambda^2 n^2$ ($t > 0$), 則

$$G'(t) = 3n(\lambda n^2 - 1)t^2 + 2(\lambda n^2 + 1)t + \lambda n(\lambda n^2 - 1).$$

由 $t > 0$ 和 $\lambda \geq \frac{1}{n^2}$ 得 $G'(t) > 0$, 函數 $G(t)$ 在 $t \in (0, +\infty)$ 上單調遞增。

又 $G\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ 可知: 當 $t \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ 時, $G(t) < 0$, $F'(t) < 0$, $F(t)$ 在 $t \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ 上單調遞減; 當 $t \in \left(\frac{1}{n}, +\infty\right)$ 時, $G(t) > 0$, $F'(t) > 0$, $F(t)$ 在 $t \in \left(\frac{1}{n}, +\infty\right)$ 上單調遞增。從而 $F(t)$ 的最小值 $F_{\min}(t) = F\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, 進而

$$\ln\left(t + \frac{\lambda}{t}\right) \geq \frac{n - \lambda n^3}{1 + \lambda n^2} \left(t - \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n} + n\lambda\right).$$

於是

$$\ln\left(a_1 + \frac{\lambda}{a_1}\right) + \ln\left(a_2 + \frac{\lambda}{a_2}\right) + \cdots + \ln\left(a_n + \frac{\lambda}{a_n}\right) \geq \frac{n - \lambda n^3}{1 + \lambda n^2} \left[\sum_{i=1}^n a_i - 1 \right] + n \ln\left(\frac{1}{n} + n\lambda\right),$$

則

$$\ln\left[\left(a_1 + \frac{\lambda}{a_1}\right)\left(a_2 + \frac{\lambda}{a_2}\right)\cdots\left(a_n + \frac{\lambda}{a_n}\right)\right] \geq \ln\left(\frac{1}{n} + n\lambda\right)^n,$$

故

$$\left(a_1 + \frac{\lambda}{a_1}\right)\left(a_2 + \frac{\lambda}{a_2}\right)\cdots\left(a_n + \frac{\lambda}{a_n}\right) \geq \left(\frac{1}{n} + n\lambda\right)^n.$$

—本文作者任教山東省泰安市甯陽縣第一中學—

105學年度周鴻經獎學金即日起開始申請

截止日期：2016年11月15日止（以郵戳為憑）

申請辦法：檢附周鴻經獎學金申請書、志向說明書、在學各學年之成績單（碩士班一年級研究生須繳大學之成績單）、周鴻經獎學金推薦書、及數學相關系所之教授二人以上之推薦書，由校方函送中央研究院數學研究所申請。

詳見本刊封底裡及中研院數學所網頁 <http://www.math.sinica.edu.tw>

備註：本獎學金只限在台就讀學生申請。