第20屆密西根數學競試題第二部份解答

編輯部

1.

設買一個足球需 x 元，買一個網球需 y 元，買一個高爾夫球需 z 元，則由題意可得:

$$\begin{cases} x+3y+\ 7z=14\cdots\cdots① \\ x+4y+10z=17\cdots\cdots② \end{cases}$$

②—①

$$y+3z=3\cdots\cdots③$$

②× 3 —③×10

$$3x+2y=21>20$$

所以20元不夠去買三個足球與兩個網球。

②× 2 —③× 5

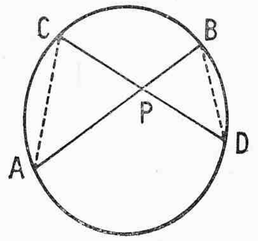
$$2x+3y+5z=19$$

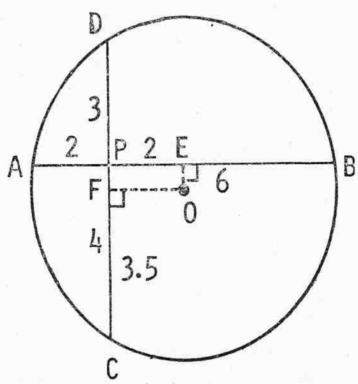
$$\therefore\quad 2x+3y<19<20$$

所以20元足夠去買兩個足球與三個網球。

2. (a)

如圖所示: $\triangle APC$ 與 $\triangle BPD$ 相似，因此 $AP:PD=CP:BP$，所以 $AP\times PB=CP\times PC$





(b) 如圖所示:

由 (a) $AP\times PB=CP\times PD$

$\therefore\quad PC=4$

$$AE=EB=\frac{1}{2}AB=4$$

$$CF=DF=\frac{1}{2}CD=3,5$$

$\therefore\quad PE=6-4=2$

又

$$PE=OF$$

$\therefore\quad$ 半徑$=\sqrt{2^2+(3.5)^2}=\sqrt{65}/2$

3.

設

$$p(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+(ax+b)$$

$\because\quad p(2)=2, p(3)=3$

$\therefore\quad \begin{cases} 2a+b=2 \\ 3a+b=3 \end{cases}$

$\therefore\quad a=1, b=0$

因此餘式爲 x。

4. (a)

依題意

$$x_1=2$$
$$x_2=x_1+5$$
$$x_3=x_2+8$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+)\quad x_n=x_{n-1}+(3n-1)$$

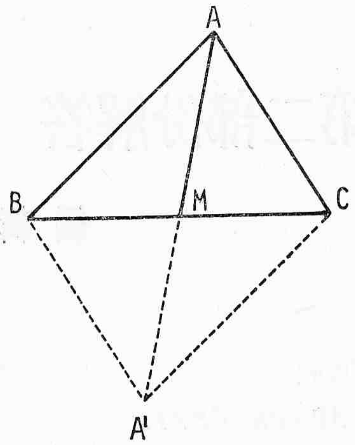
$$x_n=2+5+\cdots\cdots+(3n-1)$$
$$=n(3n+1)/2$$

$\therefore\quad x_n=n(3n+1)/2$

(b)由數學歸納法可證。

5. (a)

如圖所示:



$$AM=A'M.\quad A'B=AC,$$

又

$$AM+A'M\leq AB+A'B=AB+AC$$

(三角形兩邊和小於第三邊)

∴ $$2AM\leq AB+AC$$

$$AM\leq\frac{1}{2}\ AB+\frac{1}{2}AC$$

(b) (i) 因蒼蠅共飛了4公尺且又回原地，因此其所經過之路線為一封閉曲線，所以其路線上任意兩點距離不大於 2 (因兩點間以直線距離為最短)。

(ii) 設其出發點為A，飛過路線中點為P，則所飛過路線必包含於以 AP 中點O為球心，半徑為 1 之球內部。因對於路線上任意一點B，由(a)部分

$$BO\leq\frac{1}{2}\ AB+\frac{1}{2}BP$$

而 $$AB+BP\leq 路線\ ABP=2$$

∴ $$BO\leq\frac{1}{2}\ AB+\frac{1}{2}\ BP=1$$