三角多項式根的探討

陳昭地

在高中數學有關三角函數的問題裏，我們常會碰到解下列形式的三角多項式根的問題:

$$T(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)，\text{其中 } a_0, a_k, b_k \text{ 都是實數。} \qquad \cdots\cdots(1)$$

由於 $T(x)$ 的週期爲 2π，在方程式 $T(x)=0$ 有解的情形下，常須寫出其一般解，因此 $T(x)=0$ 就有無限多個解。在求形如 $T(x)=0$ 的根時，通常在區間 $[0,2\pi)$ 的範圍內找出它的根，則整個一般解可就由此得出；所以在 $[0,2\pi)$ 上考慮 $T(x)=0$ 之根誠然是頂重要基本的問題。

在 $[0,2\pi)$ 上考慮三角方程式 $T(x)=0$ 之解，自然會聯想到下列形式的代數多項式根的問題:

$$P(z)=c_0+c_1z+\cdots\cdots+c_mz^m \qquad \cdots\cdots(2)$$

卽使在 $P(z)$ 爲實係數的情形下，一般說來，求解 $P(z)=0$ 也不是太容易的問題，然而我們都熟知下列的**代數基本定理**:

任意次數 ≥ 1 的多項式 $P(z)$ 至少有一根（實根或複根）

進而言之，若一個 d 重根算成 d 個根，則 m 次多項式 $P(z)$ 恰有 m 個根。

上面的代數基本定理，雖然大多人不知道如何證明，但卻常運用到這個定理。現在，我們要問三角多項式 $T(x)$ 根的問題，是否有對應於代數基本定理的類似結果呢？爲此，先來介紹兩個基本名詞:

1. 設 $T(x)$ 爲形如(1)式的三角多項式，當 $a_n^2+b_n^2\neq 0$ 時，則稱 $T(x)$ 爲**n次三角多項式**。例如:

$5+\cos x$，$\cos x+\sin x$，$-3+\sin x$，$1-3\cos x+2\sin x$ 均爲一次三角多項式；

$1-\cos x+\cos 2x$，$\sin x+\cos 2x+5\sin 2x$ 均爲二次三角多項式。

2. 設 $T(x_0)=T'(x_0)=\cdots\cdots=T^{(r-1)}(x_0)=0$ 而 $T^{(r)}(x_0)\neq 0\ (r\geq 1)$ 則稱 x_0 爲 $T(x)=0$ 的 **r 重根**。例如

$$\frac{\pi}{3}\text{爲}2\cos 2x-4\cos x+3=4\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2 \text{ 的 2 重根。}$$

我們應注意到一個 n 次三角多項式，由於 $|\cos kx|\leq 1$，$|\sin kx|\leq 1$ 的自然限制，可能沒有根。例如:

$$5+\cos x,\ 4-\sin x+\cos 2x,\ 3-\sin x+\sin 5x+\frac{1}{2}\cos 6x,\ \cdots\cdots$$

都沒有根。因此，我們可知要想得到與代數基本定理完全一樣的結果是不可能的；但是下述的結果是正確的:

定理 一個形如(1)式的 n 次三角多項式 $T(x)$，把 d 重根算成 d 個根，在 $[0,2\pi]$ 上其根總數不超過 $2n$ 個。

證明 我們利用下面熟知的尤拉公式:

$$\cos a=\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2},\quad \sin a=\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}$$

可把(1)式的多項式 $T(x)$ 寫成

$$T(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}+b_k\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right)$$

故

$$T(x)=\sum_{k=-n}^{n}d_ke^{ikx}=e^{-inx}\sum_{k=-n}^{n}d_ke^{i(k+n)x}$$

即

$$T(x)=e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}c_ke^{ikx}\cdots\cdots(3)$$

設

$$P(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\cdots+c_{2n}z^{2n}\cdots\cdots(4)$$

若 $z=e^{ix}$，則(3)與(4)之關係可寫成

$$P(z)=e^{inx}T(x)\cdots\cdots(5)$$

〔注意〕：若 $x',x''\in[0,2\pi),\ x'\neq x''$ 且 $T(x')=0=T(x'')$

則 $z'=e^{ix'}\neq e^{ix''}=z''$ 且 $P(z')=0=P(z'')$。

現在，把(5)式左右兩邊對 x 微分，利用微分的基本公式知：

$$P'(z)\frac{dz}{dx}=e^{inx}[inT(x)+T'(x)]$$

但 $\frac{dz}{dx}=ie^{ix}$，故得

$$P'(z)=e^{i(n-1)x}[nT(x)-iT'(x)]\cdots\cdots(6)$$

若再把(6)對 x 微分，可得

$$P''(z)=e^{i(n-2)x}[\alpha T(x)+\beta T'(x)+\gamma T''(x)]\cdots\cdots(7)$$

其中 α，β，γ 爲適當的已知數。

同理可得

$$P^{(s)}(z)=e^{i(n-s)x}[\lambda_0T(x)+\lambda_1T'(x)+\cdots\cdots+\lambda_sT^{(s)}(x)]\cdots\cdots(8)$$

其中 $0\leq s\leq n$，$\lambda_0,\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_s$ 爲已知常數。現若 x_0 爲 $T(x)=0$ 的 d 重根，則

$$T(x_0)=T'(x_0)=\cdots=T^{(d-1)}(x_0)=0,$$

因此，當 $z_0=e^{ix_0}$ 時，

$$P(z_0)=P'(z_0)=\cdots\cdots=P^{(d-1)}(z_0)=0。$$

依此可知 z_0 至少爲 $P(z)=0$ 的 d 重根，亦卽若 z_0 爲 $P(z)=0$ 的 l 重根，則 $l\geq d$

由上可推知：若 $T(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 上有 P 個不等的根

x_1 爲 $T(x)=0$ 的 m_1 重根

x_2 爲 $T(x)=0$ 的 m_2 重根

………………………………

x_p 爲 $T(x)=0$ 的 m_p 重根

則 $P(z)$ 也有 p 個不等的根：

$z_1=e^{ix_1}$ 爲 l_1 重根且 $l_1\geq m_1$，

$z_2=e^{ix_2}$ 爲 l_2 重根且 $l_2\geq m_2$，

$$z_p=e^{ix_p} \text{ 爲 } l_p \text{ 重根且 } l_p \geq m_p$$

但 $P(z)$ 爲 $2n$ 次的代數多項式，由代數基本定理知

$$l_1+l_2+\cdots\cdots+l_p \leq 2n$$

因此 $T(x)=0$ 的根總數 $N \leq 2n$，於是本定理得證。

由上面的定理得知一個 n 次的三角多項式在〔$0, 2\pi$) 上根的總數 $\leq 2n$。利用這個定理我們可以得到類似於判別兩個代數多項式恒等的結果:

設

$$T_1(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$T_2(x)=q_0+\sum_{k=1}^{n}(q_k\cos kx+p_k\sin kx)$$

爲兩個實係數三角多項式，且在〔$0, 2\pi$) 上有 $(2n+1)$ 個不同的數使它們相等，則

$$T_1(x)\equiv T_2(x)$$

卽 $a_0=q_0, a_k=q_k, b_k=p_k (k=1,\cdots,n)$。

參 考 資 料

Natanson, I.P., *Constructive Function Theory* 第一册 第 57～59 頁。

——本文作者現任敎於師大數學系