數學傳播 43卷2期, pp. 15-23

幾何對現代科學的影響

演講者：丘成桐院士
時　間：民國 107 年 12 月 27 日
地　點：ICCM 2018, 集思台大會議中心

總論

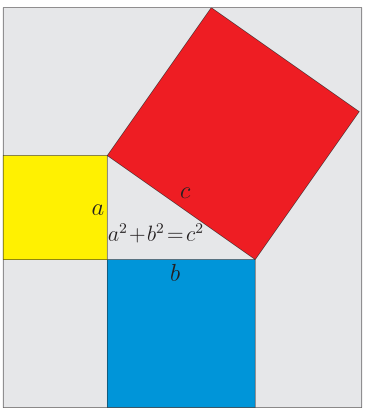
數學大概是科學中最古老的學門, 也是所有科學的基礎。數學這門學問已經發展了數千年, 其中有兩個始終未改變的要素:「數」與「形」, 也就是理解整數結構及物體形狀, 這兩者始終是數學家最熱衷的研究課題。

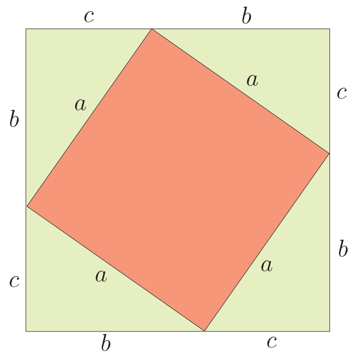
幾何學是科學的一部分, 完全致力於理解物體的形狀。茲描述它對科學的貢獻如下。

古希臘的貢獻、牛頓力學

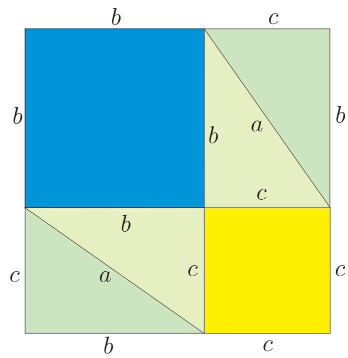
上面提到數及幾何, 這兩個主題實際上是密切相關的。

公元前 530 年, 希臘數學家畢達哥拉斯 (公元前 570 年 ～ 約 495 年) 在義大利南部 Croton 組織了一個秘密社團, 循數學之道探索人類靈魂的救贖。他發現了著名的畢氏定理, 證明直角三角形滿足的方程式。藉由這個公式, 幾何和代數有了聯繫。(日後發展的三角學, 以此公式爲基礎。)





$A = a^2 + 4\frac{bc}{2}$



$A = b^2 + c^2 + 4\frac{bc}{2}$

更重要的是, 畢達哥拉斯的某門徒發現: 若直角三角形的兩個直角邊的長度都等於 1, 則斜邊的長度不能寫成兩個整數的比。這震驚了整個學派, 因爲他們認爲宇宙中的一切事物都可用整數來解釋。這是幾何首次揭示數字結構, 也是數學家首次經由幾何擴張數系規模。

數百年後, 阿基米德 (公元前 287 年 ～ 212 年) 考慮二次多項式界定的幾何物體, 計算其面積及體積。他以具體方式使用無窮過程, 建立起計算 π 的方法。因此, 希臘數學家經由幾何過程, 實質上已引入了代數數及超越數。

同樣重要的是, 歐幾里得 (公元前 325 年 ～ 265 年) 發現了歐幾里得公理, 藉之推導出平面幾何所有已知的定理。歐幾里得深受柏拉圖 (公元前 429 年 ～ 347 年) 等希臘先哲暨數學家的影響; 柏拉圖宣稱, 唯有了解幾何的學者才能進入他的哲學殿堂。

在古代的科學發展中, 希臘學者的公理方法堪稱獨特。該方法結合原子說後, 對現代物理學的發展產生了深遠的影響。畢竟, 牛頓 (1643～1727) 基於類似的方法寫下他著名的力學著作, 藉由牛頓力學三定律推導力學規則。

簡單公理足以推導出極其複雜的物理現象, 這一事實全然符合希臘與西方文化的預期 (但對中國人、印度人、埃及人和巴比倫人來說則屬陌生)。它代表了唯有人類才能夠發展的高水平文明。

愛因斯坦 (1879～1955) 曾說 :「世界上最難理解的事, 是它竟可以被理解。」牛頓力學的巨大成功, 使物理學家相信統一場論存在; 這是愛因斯坦在人生最後四十年全力推導的理論。

微積分與笛卡兒坐標

微積分的發明, 是數學的巨大進展; 箇中重要動機, 是意圖計算幾何物體的體積 (積分) 及行星的運動量。印度數學家和天文學家早已知道如何微分 $\sin x$, 原因是行星的角度變化微小; 他們藉由微分函數 $\sin x$ 來計算校正。

在牛頓之前, 除了古文明的發展, 另有其他極其重要的工作。笛卡兒 (1596～1650) 關於坐標的工作至關緊要。藉助笛卡兒坐標 (通稱直角坐標) 表達, 我們能以分析的形式陳述幾何問題。更甚者, 我們也因之而能體察高維空間物理系統的自由度! 這個概念對牛頓來說至爲重要; 他認爲宇宙是靜態的, 物理系統可用固定的坐標描述。古希臘數學家以降, 直角坐標的引進堪稱我們對空間理解的一大躍進。

牛頓結合微分與積分, 根據平方反比定律計算行星運動。他成功解釋了著名的克卜勒行星運動定律。微積分的巨大成功, 確立了它在科學中的地位。

微積分可用來詳細描述曲線和曲面; 歐拉 (1707～1783) 對此做過討論, 寫下曲率公式, 並以微分方程陳述費馬 (1607～1665) 的最小作用量原理 (least action principle)。古典力學因此有大幅度的進展。

黎曼

這是奠定現代數學和科學基礎的時期：高斯 (1777～1855)、黎曼 (1826～1866)、James C. Maxwell (1831～1879) 及法拉第 (1791～1867) 的偉大發現, 促成科學家對空間、電力及磁力的新理解。高斯及黎曼基於他們對幾何和微積分發展的體悟, 實際上得出了 Maxwell 方程四定律中的三個。

但幾何學最引人注目的發展是黎曼的就職演講論文及他的黎曼面理論。它們都以非常內在的方式影響了我們對自然界的理解。

黎曼之前的空間概念, 幾乎都取決於直角坐標的固定性。牛頓視空間爲靜態的部分緣由, 是他認爲萬事萬物都必須藉由宇宙的內在坐標系來度量。我相信, 如果他知道黎曼引入的幾何思想, 可能就會有不同的想法。

人們疏於細究黎曼 1854 年的著名演講。他有興趣發展的空間概念, 要能夠理解現實世界的物理本質。他已憂心自己的幾何力有未逮, 不足以處理至小及極大尺度的宇宙。

以現代術語來說, 他對量子幾何的概念感興趣。他想知道：使用非二次方程來量度極大的宇宙的同時, 是否該用離散幾何測量極小的尺度。他的主張仍饒富趣味。

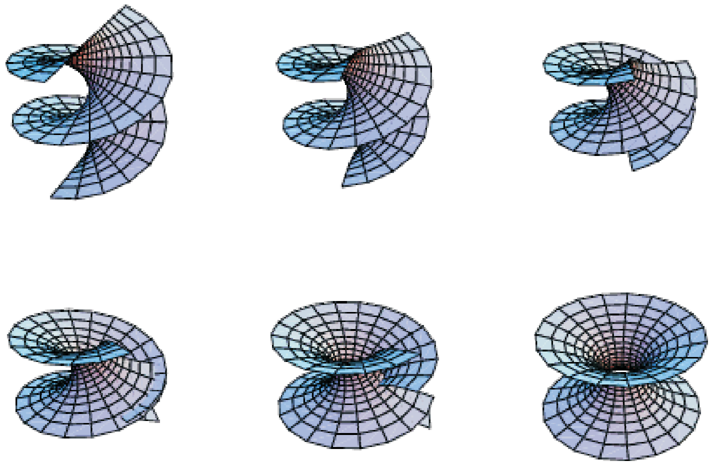
在黎曼引入這些概念之前, 有一些重要的發展, 其中之首要者, 是等效原理的概念。它可以追溯至古代, 經伽利略 (1564～1642)、克卜勒 (1571～1630) 等人修飭後, 變得更爲基本, 後來成爲愛因斯坦建立廣義相對論的基本原理。以愛因斯坦的語言來陳述: 重力定律獨立於觀察者。黎曼在陳述其幾何時已意識到該原理, 因而建立曲率張量的概念。

高斯的 Theorem Egregium

曲率張量的內在 (intrinsic) 定義可回溯至高斯。1827 年, 高斯發表 Theorem Egregium (「最好定理」), 名稱源於他對自己的定理甚感興奮。吾人若在三維歐氏空間計算曲面兩個主曲率的乘積, 所得之值稱爲高斯曲率, 是由曲面上的距離度量所完全決定; 換言之, 它與曲面具體嵌入三維空間的方式無關。

要理解這個概念, 我們可審視懸鏈面 (catenoid) 和螺面 (helicoid)。它們的外觀非常不同, 但它們可經由連續過程形變爲彼此, 過程中不會產生皺摺或撕裂, 因此不會出現額外的壓縮或剪切。高斯曲率在這種變形下保持下變 (見下圖)。

高斯對雙曲幾何的概念 (由 János Bolyai (1802～1860) 及 Nikolai Lobachevsky (1792～1856) 獨立提出) 感到興奮的同時, 也淸楚理解此曲率的重要性。我相信高斯很想將自己的定理置於一個自然的框架, 好讓他的定理能以自然的方式出現。因此, 當黎曼爲博士論文口試提出三個不同的主題時, 高斯選擇了「幾何學的基礎」這個題目。顯然黎曼的歷史性演講也沒讓高斯失望。



再談黎曼

黎曼創建的, 實際上是一種包含等效原理概念的幾何學。他的空間不依賴單一的直角坐標, 也更加動態。這確實突破了牛頓對空間的舊觀點。爲了充分理解等價原理的概念, 黎曼發展了張量的基本工具, 特別是黎曼曲率張量。

諷刺的是, 歷史上關於黎曼曲率的首篇出版品, 是 1861 年黎曼提交給巴黎科學院, 爭取某獎項而未果的論文。在那篇文章中, 他用黎曼曲率來檢測熱傳導的模式。

重點是, 黎曼曲率張量僅取決於度量張量。黎曼的論文創建了內在幾何的新概念, 獨立於任何大域靜態的笛卡兒系統。

張量分析

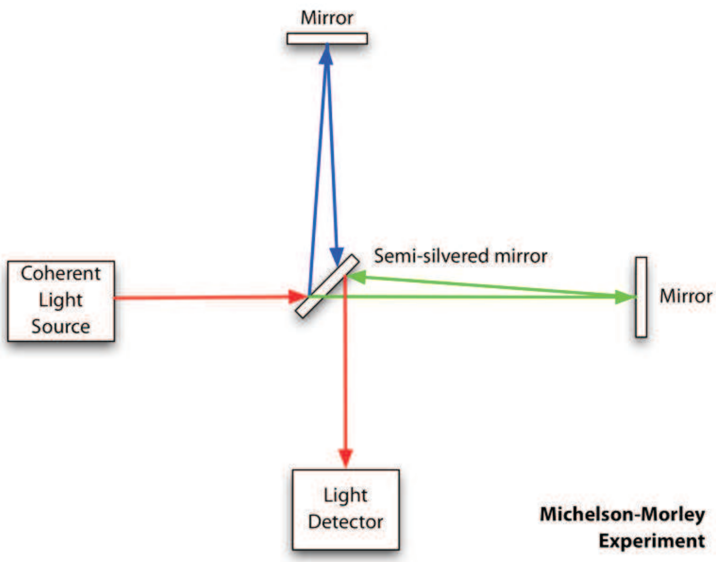
張量分析的引入, 對現代科學產生了巨大的影響。它肇始於黎曼1861年的論文。1869年, Elwin B. Christoffel (1829∼1900) 和 Rudolf Lipschitz (1832∼1903) 不約而同, 詳加討論了張量分析及協變微分 (covariant derivatives)。1900年, Ricci (1853∼1925) 及 Tullio Levi-Civita (1873∼1941) 在著作中做了更詳盡的討論。

1903 年, Ricci 提出張量縮約 (tensor contraction) 的主張, 取黎曼曲率張量的跡 (trace) 以形成一個二階張量, 現稱 Ricci 張量。

廣義相對論、三談黎曼

這些工作爲愛因斯坦的廣義相對論奠定了最重要的基礎。如果沒有這些幾何學者及 Marcel Grossmann (1878∼1936) 的基礎工作, 很難想像廣義相對論要如何創立。

1887年, Albert A. Michelson (1852～1931) 和 Edward Morley (1838～1923) 做了非常著名的實驗, 證明光速與觀察者無關。黎曼當時若仍在世, 正年屆 61; 我們不免推測：他之後可能會發現狹義相對論和廣義相對論, 理由是：Lorentzian 對稱群已經自然地出現在 Maxwell 方程組中, 而 Michelson 和 Morley 的實驗則確實顯示光速特殊的地位。



在推導愛因斯坦方程的較後階段, 進一步縮約 Ricci 張量所得的純量曲率, 恰好正確地量度了物質分布。這意味著完整的黎曼曲率張量, 測量了時空的完整重力內容。

愛因斯坦的重力理論改變了時空的基本概念。Eddington (1882～1944) 在 1919 年驗證了到光會彎曲的理論預測。援用哈伯 (1889～1953) 以望遠鏡驗證的的宇宙膨脹理論, 也能觀察到時空是動態的。

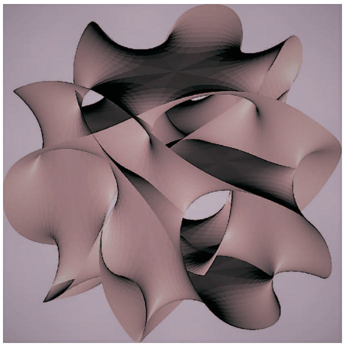
規範理論、額外維度理論、Calabi-Yau 空間

創建廣義相對論之後, 愛因斯坦企圖統一大自然的多種力, 這個宏願引發了諸多發展。兩個最重要的發展是：Hermann Weyl (1885～1955) 發現的規範理論, 以及 Theodor Kaluza (1885～1954) 與 Oskar Klein (1894～1977) 提出的額外維度理論; 兩者本質上都是幾何的。

纖維叢 (fiber bundle) 理論和連絡 (connection) 理論在 1940 年代早期發展成熟, 從而 Eduard Stiefel (1909～1978) 與 Hassler Whitney (1907～1989)、Lev Pontryagin (1908～1988) 及陳省身 (1911～2004) 提出特徵類的基本數學理論。

Weyl 的規範理論有非交換 (non-abelian) 的對應版本, 亦即 Yang-Mills 理論。楊振寧和 Robert Mills (1927～1999) 觀察到, 這套架構在纖維叢與特徵類的一般性理論可以用來理解粒子物理; 最終它們成爲高能物理中標準模型的基本工具。量子物理和相對論是二十世紀理論物理學的兩大支柱。上述故事說明了箇中的幾何原委。

除此之外, Kaluza 對大自然的理論模型做出非常重要的貢獻 (Klein 後來參與研究, 該理論現稱 Kaluza-Klein 理論)。Kaluza 是一位數學家。他在平坦的 Minkowski 四維時空上添加圓, 從而提出第一個五維相對論。他發現：藉由愛因斯坦方程在此五維時空的真空解, 可獲致有效的四維時空理論, 耦合重力與 Maxwell 方程。這是令愛因斯坦十分興奮的傑出成果。唯一的問題是, 它會產生一個無法在自然界觀察到的純量場 (scalar field)。儘管如此, 拓樸及額外維度的思想, 是當代物理極爲基本的論題。



弦論 (string theory) 的發展顯示, 量子化的重力理論可能產生異常, 唯當時空的總維數爲 10 時, 異常才會消失。從這個意義上來說, 額外維度理論乃勢所必然。

時空基態的超對稱模型, 是在真空 Minkowski 時空上外加六維 Calabi-Yau 空間。其中六維 Calabi-Yau 空間的尺度非常微小, 迄今創建的最強大機器也檢測不到它, 但它的拓樸及幾何特性可用來計算質量及基本粒子的相互作用。在物理和數學領域進行的弦論研究, 引發了許多重要的工作。

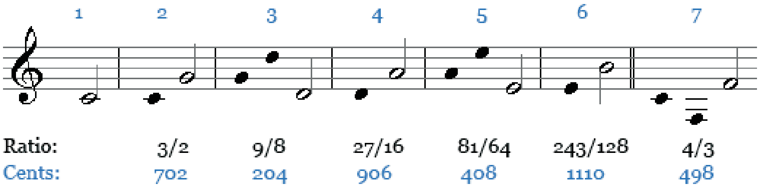
對偶性

在弦論的進展中, 出現一些出人意表但十分重要的對偶性概念, 統一了諸多看似相異的主題。弦論中的對偶性是概括性的概念, 允許我們執行一些以前束手無策的重要計算。這包括大直徑空間與小尺寸空間之間的對偶性。

重力理論與規範理論之間的對偶性, 創建出非常重要的科學思想。它對凝聚態物理學來說也十分重要。

値譜(Spectra)

量子力學是一門以高精確度描述大自然的學科。量子物理非常重要的一項工具是算子値譜。値譜的概念是數學家在 19 世紀發展出的, 事實上可回溯至古希臘哲學家。畢達哥拉斯學派辨識出聲波中的基音。撥動端點固定的弦時, 可實際產生這些基音。



18 世紀後期, Jean Fourier (1768～1830) 提出主張： 任何波都可分解爲具某些頻率

的基波。在任意選取的封閉曲面, 振動的固有頻率與曲面的幾何性質密切相關, 稱爲曲面值譜 (spectra of surface)。它們是各個曲面特有的、離散分布的無限多個數。原則上, 我們可以敲擊曲面並聽取它發出的音調, 從而找到曲面的固有頻率。有個著名的問題: 藉由這些基本頻率, 我們是否可以決定曲面的幾何形狀? Mark Kac (1914～1984) 因此提出衆人熟知的問題 :「是否可以聽到曲面的形狀?」

19 世紀伊始, 數學家總試圖援用幾何來估計緊緻空間的基本頻率。有種衆所周知的途徑植基於變分法, 迭經 Lord Rayleigh (1842～1919)、Lord Kelvin (1824～1907)、George Pólya (1887～1985)、Gábor Szegö (1895～1985) 及其他多人改進。

等周界常數、圖論

名爲「等周界常數」的重要幾何量, 在這種理論中廣獲使用。埃及等古文明已知道 : 具固定面積的平面區域中, 以圓盤的周長最短; 換言之, 任何區域的面積都不會大於其周長的平方除以 4π。

這類貌似純良的不等式大概是最古老的不等式。直至當代, 它在幾何學仍具有根本的重要性 : 給定一個封閉曲面, 我們要在這個曲面上找到某封閉曲線 C, 其界定的區域面積 A 不大於其他具相同周長的區域。曲線 C 的長度 L 與區域面積 A 的比值 L/A 是個重要的量。

我們要在所有可能的封閉曲線中最小化這個量。這種形式的常數, 源自對等周不等式的考量; 二十世紀初, 數學家用該不等式估計封閉曲面的第一個非零頻率, 如今稱之爲 Cheeger 常數。該常數已被推廣至圖論; 在圖論, 我們希望找到優質的幾何裁切線, 分割後訊息得以有效地穿越裁切線。

再談值譜

在量子物理及任何與波動相關的課題中, 值譜及波的行爲該如何理解, 始終是至關緊要的問題。有個植基於幾何考量的重要方法。

四十年前, 我提出的一個簡單的問題, 引發了衆人對該領域的巨大興趣。該問題是 : 取某個基波的節點集 (nodal set, 波在該集合中的各點都靜止不動); 該集合的長度、波的特徵值的平方根, 兩者數量級應相同。事實上, 我們想了解的是 : 將節點線 (nodal lines) 的長度除以特徵值的平方根, 所得的商如何分布。

量子穿隧(Quantum Tunneling)、三談值譜

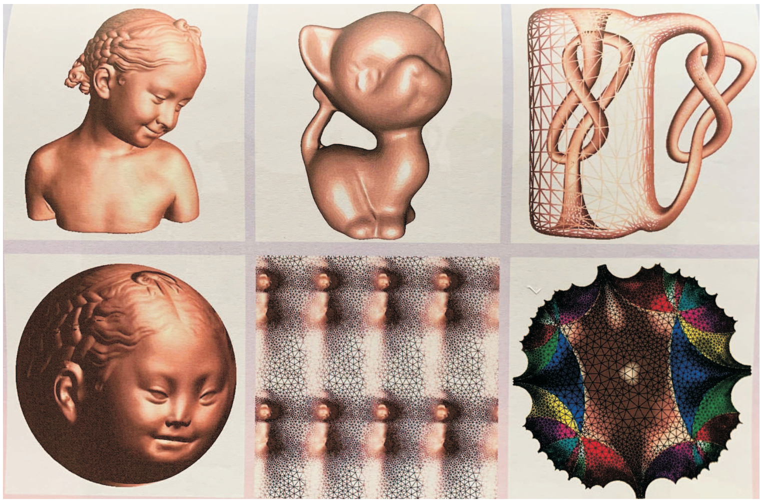
另一個有趣的問題涉及量子穿隧 : 粒子從一個量子阱 (quantum well) 遊走到另一個量子阱, 需時多久? 它關乎 Schrödinger 算子的首兩個特徵值的間隙。要做數值計算很困難, 因爲間隙之窄小屬指數級。對波函數做幾何考量有助於估計這種間隙。

電腦科學、再談圖論

在當代電腦科學, 幾何概念大多有其顯著的重要性。除了之前提到的概念, 圖論也存在等周界不等式和 Harnack 不等式的類似概念。當代圖論使用了大量的幾何概念。

在一般圖上, 有一個自然定義的算子, 作用於定義在頂點上的函數空間, 擔當的角色類似於平滑流形上的 Laplace 算子。該算子的值譜不難計算, 但它揭露了圖的大量訊息。圖論中有個概念類似於定義在流形上的 Green 函數, 出現在 Larry Page 的公式中, 用於 Google 搜索引擎。

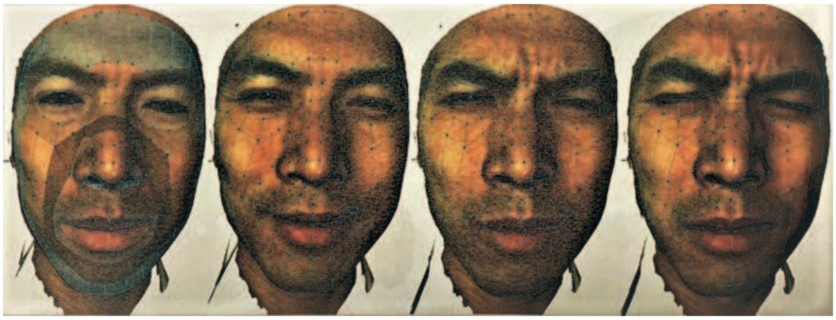
160 多年前, 黎曼在博士論文中引入黎曼面的概念, 其目的是研究複函數的單值化 (uniformization), 日後卻成爲研究曲面幾何的至要工具。顧險峰和我把單值化的想法應用於電腦影像的問題。它對許多工程問題很有用, 譬如人臉辨識。



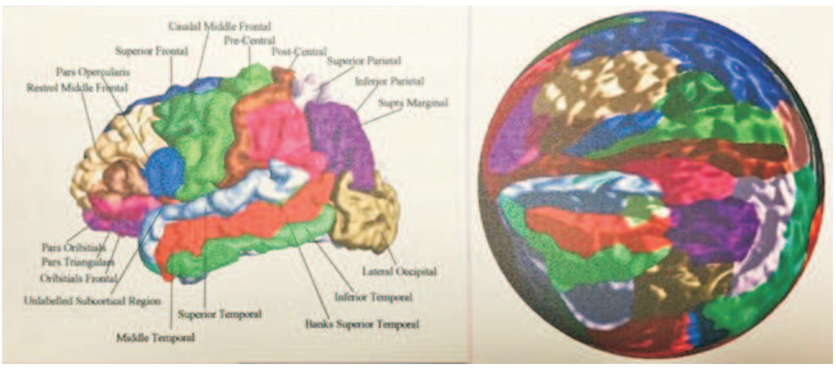
球面幾何　　歐氏幾何　　雙曲幾何

紋理映射 (texture mapping)

採用幾何來輔助電腦圖學的想法已廣受青睞。雷樂銘、林文偉、樂美亨等人把它應用於人臉辨識、醫學影像及其他課題。Stanley Osher 和他的團隊使用水平集方法, 取得了非常好的結果。



面部表情捕捉



大腦造影 (brain mapping)

深度學習 (deep learning) 方法執行流形嵌入及機率測度變換。機率測度變換可用最優傳輸映射 (optimal mass transportation map) 來進行, 這相當於微分幾何中的 Minkowski-Alexandrov 定理, 可以陳述爲 Monge-Ampère 方程。

—演講者丘成桐爲哈佛大學講座教授—

基於幾何方法的生成模型 (generative model) 生成的隨機面部圖像