數學傳播 43卷3期, pp. 60-62

# F-P 卷積恆等式的一頁證明

陳建燁

## 壹、前言

在「Fibonacci 與 Padovan 的對話 (上)(下)」兩篇文章 [1, 2] 中, 首先將三階遞迴數列的一般項 $a_n$, 表示成完全齊次對稱多項式 $h_n(\alpha,\beta,\gamma)$ 的線性組合, 接著將巴都萬數列 $\langle P_n\rangle$ 的一般項表示爲完全齊次對稱多項式, 最後利用「自由分解重組恆等式」, 將 $F_n$ 與 $P_n$ 的卷積化成 $h_n(\alpha,\beta,a,b,c)$ 的型態, 運用代數變形, 得到結果:

$$\sum_{i=0}^{n} F_i\cdot P_{n-i}=F_{n+3}-P_{n+3}.$$

將此式稱爲「F-P 卷積恆等式」。

本文的目的, 在於使用盡可能少的預備知識, 以及盡可能精簡的算式, 給出F-P 卷積恆等式的另一個證明。

## 貳、記號

1. Fibonacci 數列 $\langle F_n\rangle$: $\begin{cases} F_0=0, F_1=1 \\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \end{cases}$。已知其一般項爲 $F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$, 其中 $\alpha$ 與 $\beta$ 爲 $x^2-x-1=0$ 的兩根。[3]
2. Padovan 數列 $\langle P_n\rangle$: $\begin{cases} P_0=P_1=P_2=1 \\ P_n=P_{n-2}+P_{n-3} \end{cases}$。數列的前幾項爲 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, $\ldots$。根據參考資料 [4] 的說法, 此三階遞迴數列, 是在 1996 年, 由 Ian Stewart 在科學人雜誌提出。[4]

**註**: 可將 $\langle P_n\rangle$ 延拓至所有整數下標:
由 $P_n=P_{n-2}+P_{n-3}\Rightarrow P_{n-3}=P_n-P_{n-2}$, 可由此定出 $P_{-1},P_{-2},P_{-3},\ldots$: $P_{-1}=P_2-P_0=1-1=0$, $P_{-2}=P_1-P_{-1}=1-0=1$, $P_{-3}=P_0-P_{-2}=1-1=0$, $\ldots$。[1]

# 參、本文

**命題**: $\sum\limits_{i=0}^{n} P_i \cdot F_{n-i} = F_{n+3} - P_{n+3}$.

**證明**: 注意到

$$x^n = (x^3-x-1)\cdot(P_{-2}x^{n-3}+P_{-1}x^{n-4}+P_0x^{n-5}+\cdots+P_{n-6}x+P_{n-5})+P_{n-4}x^2+P_{n-3}x+P_{n-5}. \tag{註1}$$

設 $x^2-x-1=0$ 的兩根為 $\alpha$ 與 $\beta$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \alpha^n &= (\alpha^3-\alpha-1)\cdot\Big(\sum_{i=-2}^{n-5} P_i\cdot\alpha^{n-5-i}\Big) + P_{n-4}\alpha^2 + P_{n-3}\alpha + P_{n-5}\\ &= \alpha\cdot\Big(\sum_{i=-2}^{n-5} P_i\cdot\alpha^{n-5-i}\Big) + P_{n-4}\alpha^2 + P_{n-3}\alpha + P_{n-5}, \qquad (\text{註2})\end{aligned}$$

等號兩邊同除以 $\alpha$, 得

$$\alpha^{n-1} = \sum_{i=-2}^{n-5} P_i\cdot\alpha^{n-5-i} + P_{n-4}\alpha + P_{n-3} - P_{n-5}\beta. \tag{1}$$

同理可得

$$\beta^{n-1} = \sum_{i=-2}^{n-5} P_i\cdot\beta^{n-5-i} + P_{n-4}\beta + P_{n-3} - P_{n-5}\alpha. \tag{2}$$

將 (1)−(2) 之後, 等號兩邊再同除以 $\alpha-\beta$, 由 Binet 公式, 可得: (註3)

$$\begin{aligned}F_{n-1} &= \sum_{i=-2}^{n-5} P_i\cdot F_{n-5-i} + P_{n-4} + P_{n-5}\\ &= P_{-2}\cdot F_{n-3} + P_{-1}\cdot F_{n-4} + \sum_{i=0}^{n-5} P_i\cdot F_{n-5-i} + P_{n-2}\\ \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-5} P_i\cdot F_{n-5-i} &= F_{n-1} - F_{n-3} - P_{n-2} = F_{n-2} - P_{n-2}.\end{aligned}$$

將上式中的 $n$ 用 $n+5$ 代入, 得 $\sum\limits_{i=0}^{n} P_i\cdot F_{n-i} = F_{n+3} - P_{n+3}$, 即為所欲證之等式。

註1: 乘開 $(x^3-x-1)\cdot(P_{-2}x^{n-3}+P_{-1}x^{n-4}+P_0x^{n-5}+\cdots+P_{n-6}x+P_{n-5})$

$$=P_{-2}x^n+P_{-1}x^{n-1}+(P_0-P_{-2})x^{n-2}+(P_1-P_{-1}-P_{-2})x^{n-3}+(P_2-P_0-P_{-1})x^{n-4}$$
$$+\cdots+(P_{n-5}-P_{n-7}-P_{n-8})x^3+(-P_{n-6}-P_{n-7})x^2+(-P_{n-5}-P_{n-6})x-P_{n-5}$$
$$=x^n+0x^{n-1}+0x^{n-2}+0x^{n-3}+0x^{n-4}+\cdots+0x^3-P_{n-4}x^2-P_{n-3}x-P_{n-5},$$ 移項即可得。

註2: $\alpha^2-\alpha-1=0\Rightarrow\alpha^2=\alpha+1\Rightarrow\alpha^3=\alpha^2+\alpha=2\alpha+1$
$\Rightarrow\alpha^3-\alpha-1=(2\alpha+1)-(\alpha+1)=\alpha$。又 $\alpha\beta=-1\Rightarrow 1/\alpha=-\beta.$

註3: 費氏數列的 Binet 公式: $F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$, 其中 $n\geq 0$。

## 肆、結語

將 [1, 2] 與本篇文章作一對比:

[1, 2] 的手法是先處理一般性的三階遞迴數列, 以及引用完全齊次對稱多項式的公式, 再將之運用到一個特殊的三階遞迴數列 — Padovan 數列, 其目的不只是要推導 F-P 卷積恆等式, 而是要呈現 Padovan 數列的背景, 以及其內在的架構。

相對地, 本文完全針對 Fibonacci 與 Padovan 數列的特性發揮, 先運用Padovan 數列的遞迴關係, 建立所謂的「Padovan 數列生成多項式」:

$$x^n=(x^3-x-1)\cdot(P_{-2}x^{n-3}+P_{-1}x^{n-4}+P_0x^{n-5}+\cdots+P_{n-6}x+P_{n-5})+P_{n-4}x^2+P_{n-3}x+P_{n-5},$$

以此式爲骨幹, 將費氏數列特徵方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根 $\alpha$ 與 $\beta$ 代入, 相減再除以 $\alpha-\beta$ 之後, 由費氏數列的 Binet 公式, 將變數 $x^n$ 轉換成了數列 $F_n$, 進而整理得到所謂的「F-P 卷積恆等式」: $\sum\limits_{i=0}^{n}P_i\cdot F_{n-i}=F_{n+3}-P_{n+3}$。數學世界, 多彩多姿, 運用之妙, 存乎一心, 尚請讀者諸君不吝批評指教。

## 参考資料


1. 陳建燁。Fibonacci 與 Padovan 的對話 (上)。數學傳播季刊, 42(1), 71-79, 2018。
2. 陳建燁。Fibonacci 與 Padovan 的對話 (下)。數學傳播季刊, 42(3), 66-73, 2018。
3. 陳建燁。推導費氏數列性質三部曲(中): 用根與係數關係。高中數學學科中心電子報第109期, 2016年4月, P1。
4. 廖信傑。用矩陣方法探討三階遞迴數列。數學傳播季刊, 38(1), 36-55, 2014。


—本文作者任教台北市立第一女子高級中學—