4303 (編輯部提供)

若$m=n$，則等式顯然成立，今假設$m>n$，則

$$\begin{aligned}(a^m-b^m, a^n-b^n) &= (a^m-b^m-a^{m-n}(a^n-b^n), a^n-b^n)\\ &= (b^n(a^{m-n}-b^{m-n}), a^n-b^n)\\ &= (a^{m-n}-b^{m-n}, a^n-b^n)\end{aligned}$$

$$(\because (b^n, a^n-b^n)=(b^n, a^n)=1)$$

由此可得：若

$$k=(a^m-b^m, a^n-b^n), \qquad 則\ k \mid a^{m-n}-b^{m-n}$$

此爲本題之鑰。利用這個關係卽可證出本題，玆整理如下：

令 $(m, n)=d$，則必有正整數 r 與 δ，使得 $mr-ns=d$，（或 $ns-mr=d$）。若

$$k=(a^m-b^m, a^n-b^n)$$

則

$$k \mid a^m-b^m, \qquad k \mid a^n-b^n$$

故知

$$k \mid a^{mr}-b^{mr}, \qquad k \mid a^{ns}-b^{ns}$$

由上列關係知

$$k \mid a^{mr-ns}-b^{mr-ns}$$

卽

$$k \mid a^d-b^d$$

另一方面 a^d-b^d 顯然爲 a^m-b^m 與 a^n-b^n 的公因數，所以

$$k=a^d-b^d$$

卽

$$(a^m-b^m, a^n-b^n)=a^d-b^d=a^{(m,n)}-b^{(m,n)}$$