三階魔術立方體的完全解

林 克 瀛

安德魯（Andrews）在 1917 年出版的名著「魔方陣與魔術立方體」中列出許多魔術立方體，他給魔術立方體（以下簡稱爲魔立體）下這樣的定義：一個 n 階的魔立體是把由 1 開始到 n^3 的連續自然數排成立方體，使沿四條主對角線（指由一角穿過中心到另一角的對角線）及和任意一條邊平行的 n 個數字之和都相同。這種魔立體常常被稱爲安德魯立方體以便和其他種類的魔立體區分。請注意這一類立方體一般而言在和表面平行的面上的數字並不構成魔方陣。每一魔立體經旋轉及取鏡面後的映像共可得 48 個不同的魔立體，但一般都把它們視爲同一種解法。在安德魯書上所列出的許多三階魔立體中，許多只是把同一魔立體旋轉或反映而得，眞正不同的只有四個。

魔立體最基本的問題是到底有多少個三階魔立體？這個問題顯然並不困難，奇怪的是一直沒有人去注意。一直到八年前才有一位加拿大人韓德烈（John Robert Hendricks）證明（不必用電子計算機）出三階魔立體只有四種，也就是安德魯書上列出的那四種。他的論文發表在「趣味數學」五卷一期（1972）。由於國內的圖書館查不到早期的「趣味數學」，筆者特地寫信給正在美國加州大學訪問的李怡嚴教授代爲影印一份論文，以下是這篇論文的內容。

定理一： 三階魔立體中央的數字必須是 14

證明: 三階魔立體可以用由上到下的三個方陣表示如圖一所示。每一格中的數字以英文字母代表。由定義知主對角線上三個數字之和必爲 42，因此

C	F	I
B	E	H
A	D	G

	M	

g	d	a
h	e	b
i	f	c

圖一: 一個三階魔術立方體的排列法可以用由左自右的三個方陣表示出來

$$A+M+a=G+M+g=42$$

相加得 $$A+a+2M+G+g=84 \qquad (1)$$

由定義知每一邊上三個數之和也是42，因此

$$A+D+G=g+a+d=42$$

相加得 $$A+a+D+d+G+g=84 \qquad (2)$$

將 (1) 及 (2) 二式相減可得 $2M=D+d$，同理由對稱可知 $2M=F+f$。由定義知

$$42=E+M+e,$$

三式相加得

$$4M+42=D+E+F+d+e+f+M,$$

再減去 $D+E+F=42$ 化簡知 $M=14$.

定義: 穿過中心並與表面平行的平面稱爲中央面（共有三個）。

定理二: 中央面上每條對角線上數字之和爲42。

證明: 由 $D+d=2M=28$ 可知 $D+d+M=42$。

定理三: 數字 1 不能放在中央面的角上。

證明: 設中央面如圖二所示，由定理一知中央數爲14，如將 1 放在左上角，則由定理二知右下角必爲27。但由魔立體定義知 $X+Y+1=Y+Z+27=42$，消去 Y 可得 $X-Z=26$。此式只有一解，即 $X=27$ 及 $Z=1$，但每一數只能出現一次，$Z=1$ 與魔立體定義不符。

1		
X	14	
Y	Z	27

圖二: 把 1 放在中央面的左上角

定理四: 若將 2 放在中央面的角上，則中央面上的方陣如圖三所示，完全決定（不計旋轉或反映）。

2		
X	14	
Y	Z	26

圖三: 將 2 放在中央面的左上角

證明: 將 1 放在左上角時，由定理二知右下角應爲26。此外由魔立體定義知 $X+Y+2=Y+Z+26=42$。消去 Y 得 $X-Z=24$。此式有兩解，即

$$X=25, Z=1 \quad 或 \quad X=27, Z=3。$$

根據第一組解所排出的方陣如圖四所示，根據第二組解所排出的方陣只是把圖四沿對角線轉 180 度而已。

2	27	13
25	14	3
15	1	26

圖四: 將 1 放在中央面左上角可得一方陣符合魔立體之定義

如上所述一次次把 3, 4, 5……等數依次放在一中央面的左上角，可得到一連串的中央面方陣，一共可得 32 個如表一所示。

表一：符合魔立體定義的 32 個中央面方陣

2	27	13	5	25	12	7	25	10	9	23	10
25	14	3	21	14	7	17	14	11	15	14	13
15	1	26	16	3	23	18	3	21	18	5	19
3	27	12	5	24	13	7	24	11	9	22	11
23	14	5	22	14	6	18	14	10	16	14	12
16	1	25	15	4	23	17	4	21	17	6	19
3	26	13	6	27	9	7	23	12	9	20	13
24	14	4	17	14	11	19	14	9	18	14	10
15	2	25	19	1	22	16	5	21	15	8	19
4	27	11	6	25	11	7	22	13	9	21	12
21	14	7	19	14	9	20	14	8	17	14	11
17	1	24	17	3	22	15	6	21	16	7	19
4	26	12	6	24	12	8	25	9	10	21	11
22	14	6	20	14	8	15	14	13	15	14	13
16	2	24	16	4	22	19	3	20	17	7	18
4	25	13	6	2	13	8	24	10	10	19	13
23	14	5	21	14	7	16	14	12	17	14	11
15	3	24	15	5	22	18	4	20	15	9	18
5	27	10	7	27	8	8	22	12	11	19	12
19	14	9	15	14	13	18	14	10	15	14	13
18	1	23	20	1	21	16	6	20	16	9	17
5	26	11	7	26	9	8	21	13	11	18	13
20	14	8	16	14	12	19	14	9	16	14	12
17	2	23	19	2	21	15	7	20	15	10	17

最後一步是由表一中選出三個方陣（魔立體中三個中央面互相垂直），舉例說明如下：先選出一對可以互相配合的方陣如圖五所示，再由表一選出第三個中央面方陣與圖五相配，如圖六所示。若是由表一找不到一個方陣與圖五相配，這種排列法就放棄，另外試一對方陣。最後再把角上剩下的八個數補上，試試看能不能符合魔立體的定義。例如圖六的排列最後只好放棄，因爲數字 1 不論放在那一個角都不成。

	11		13	10	19		21	
	24		20	14	8		4	
	7		9	18	15		17	

圖五：由表一選出一對可以相配合的中央面方陣

	11		13	10	19		21	
6	24	12	20	14	8	16	4	22
	7		9	18	15		17	

圖六：由表一再選出一個中央面方陣與圖五相配合

利用上述方法可證明三階魔立體只有四個，如表二所示。

表二：三階魔立體只有四種

3	13	26	12	22	8	6	16	20	24	16	2
17	21	4	26	3	13	26	3	13	17	3	22
22	8	12	4	17	21	10	23	9	1	23	18
23	9	10	23	9	10	17	21	4	8	21	13
1	14	27	1	14	27	1	14	27	19	14	9
18	19	5	18	19	5	24	7	11	15	7	20
16	20	6	7	11	24	19	5	18	10	5	27
24	7	11	15	25	2	15	25	2	6	25	11
2	15	25	20	6	16	8	12	22	26	12	4
	甲			乙			丙			丁	