數學傳播　44卷4期, pp. 54-55

# 圓外切四邊形涉及旁切圓的另一個性質

林士程 · 陳柏翔

在數學傳播季刊 43 卷 2 期 (170), 97-100, 有一文「圓外切四邊形涉及旁切圓的一個性質」, 其中主要定理為

> 如圖 (一) 所示, 圓外切四邊形 $ABCD$ 中, 與四邊形的一邊及它的兩條相鄰邊的延長線都相切的圓稱為四邊形的一個旁切圓, 共有四個旁切圓。旁切圓的三個切點構成的三角形稱為這個旁切圓的切點三角形。四邊形 $ABCD$ 的內切圓與各邊的切點構成四邊形 $EFGH$。設此圓半徑為 $R$, 四個旁切圓半徑依次 $r_1, r_2, r_3, r_4$, 圓心依次為 $O_1, O_2, O_3, O_4$, 相對應的四個切點三角形面積依次為 $S_1, S_2, S_3, S_4$, 並設 $EFGH$ 面積 $= S$, 則
>
> $$\frac{S_1}{r_1}+\frac{S_3}{r_3}=\frac{S_2}{r_2}+\frac{S_4}{r_4}=\frac{S}{R}$$

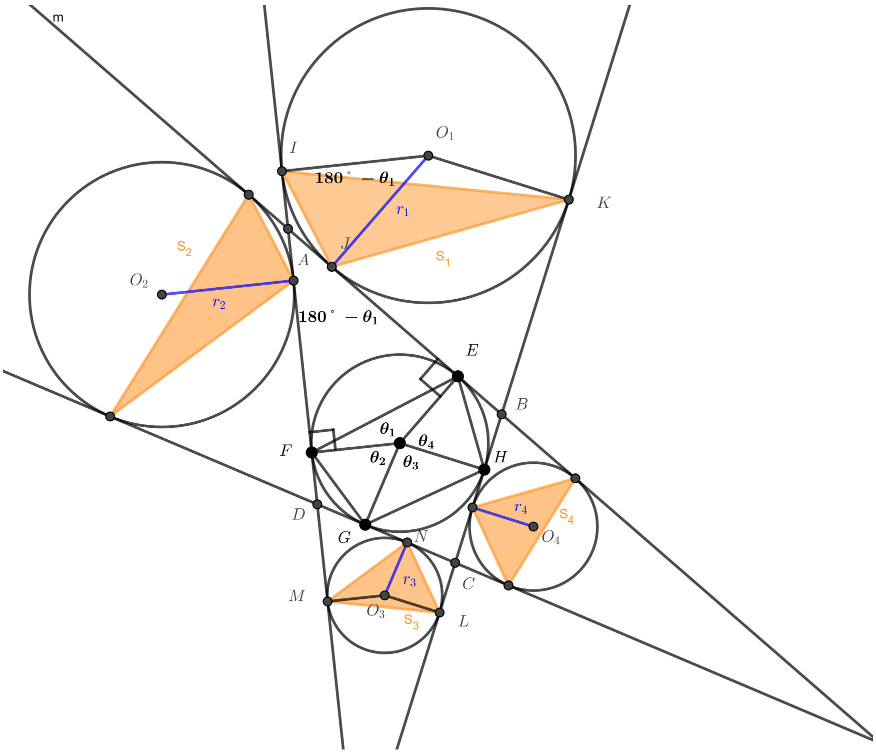


圖 (一)

本文將給出一個相似的性質:

$$\frac{S_1}{r_1^2}+\frac{S_3}{r_3^2}=\frac{S_2}{r_2^2}+\frac{S_4}{r_4^2}=\frac{S}{R^2}$$

**證明**: 令四邊形 $ABCD$ 的內切圓圓心 $O$, 設 $\angle EOF=\theta_1$, $\angle FOG=\theta_2$, $\angle GOH=\theta_3$, $\angle HOE=\theta_4$, 如圖 (一), 則 $\angle EAF=180^\circ-\theta_1$, 可推得 $\angle IAJ=\theta_1$ 及 $\angle IO_1J=180^\circ-\theta_1$。

同理可得 $\angle KO_1J=180^\circ-\theta_4$, $\angle LO_3N=180^\circ-\theta_3$, $\angle MO_3N=180^\circ-\theta_2$。

由於 $S_1=\triangle IO_1J$ 面積$+\triangle KO_1J$ 面積 $-\triangle IO_1K$ 面積,

$$S_3=\triangle MO_3N\,\text{面積}+\triangle LO_3N\,\text{面積}+\triangle MO_3L\,\text{面積},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{S_1}{r_1^2}+\frac{S_3}{r_3^2}=&\frac{\frac{1}{2}r_1^2[\sin(180^\circ-\theta_1)+\sin(180^\circ-\theta_4)-\sin(360^\circ-\theta_1-\theta_4)]}{r_1^2}\\&+\frac{\frac{1}{2}r_3^2[\sin(180^\circ-\theta_2)+\sin(180^\circ-\theta_3)+\sin(\theta_2+\theta_3)]}{r_3^2}\\=&\frac{1}{2}[\sin\theta_1+\sin\theta_4+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\sin(\theta_1+\theta_4)+\sin(\theta_2+\theta_3)]\end{aligned}$$

因爲 $\theta_1+\theta_4=360^\circ-(\theta_2+\theta_3)$, 所以 $\sin(\theta_1+\theta_4)+\sin(\theta_2+\theta_3)=0$。

所以 $\frac{S_1}{r_1^2}+\frac{S_3}{r_3^2}=\frac{1}{2}(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\sin\theta_4)$。

同理可證得 $\frac{S_2}{r_2^2}+\frac{S_4}{r_4^2}=\frac{1}{2}(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\sin\theta_4)$。

$$\begin{aligned}\text{另一方面,}\quad S=&\triangle EOF\,\text{面積}+\triangle FOG\,\text{面積}+\triangle GOH\,\text{面積}+\triangle HOE\,\text{面積}\\=&\frac{R^2}{2}(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\sin\theta_4),\end{aligned}$$

可證得 $\frac{S}{R^2}=\frac{1}{2}(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\sin\theta_4)$, 合併可得 $\frac{S_1}{r_1^2}+\frac{S_3}{r_3^2}=\frac{S_2}{r_2^2}+\frac{S_4}{r_4^2}=\frac{S}{R^2}$, 得證。

特別感謝指導老師：龔詩尹、楊昌宸老師。

## 參考文獻

1. 胡潁。圓外切四邊形涉及旁切圓的一個性質。數學傳播季刊, 43(2), 97-100, 2019。

—本文作者林士程、陳柏翔投稿時就讀彰化高中二年級—