數學傳播 45卷2期, pp. 9-11

初等微分幾何講稿與我
一段引人入勝又興味十足的閱讀經驗

葉宗樺

Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den grössten Genuss gewährt.

It is not knowledge, but the act of learning, not possession, but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment.

Carl Friedrich Gauß, letter to Farkas Bolyai, 2 September 1808

緣起

因爲在網路上討論起這本白話數學 —《初等微分幾何講稿》而認識了黃武雄老師, 後來還被黃老師邀請參與了《大域微分幾何》三卷書封面的設計; 在這整個過程中我也發現作者想和讀者們分享一個精彩的故事, 而這個故事的精華梗概就寫在《初等微分幾何講稿》以及《大域微分幾何》三書當中。從《大域微分幾何》三書的封面, 不難發現這三部曲的主角分別是 Bernhard Riemann (1826∼1866), Élie Cartan (1869∼1951) 以及 Pierre-Simon Laplace (1749∼1827), 至於《初等微分幾何講稿》的故事主人翁, 我以爲就是數學王子 Carl Friedrich Gauß (1777∼1855)。

稍微從歷史道來

微分幾何是經典數學的一個研究主題學門, 關於幾何思想的種子, 已經深埋在古希臘 Euclid 幾何學的土壤中, 到了 Newton 和 Leibniz 開創微積分的時代, 逐漸發芽; 其後經過 Euler、Monge 等大數學家研究曲線與曲面, 古典微分幾何就這麼開始枝繁葉茂; 至十九世紀, 由微分幾何以及非歐幾何 (註 1) 的研究, 數學家們逐漸認識到幾何學在基礎上有更開闊與豐富的內涵等待人們去做更深刻的思考; 這當中最關鍵的領悟與發現正是 Gauß 的「絕妙定理」(拉丁語: Theorema Egregium); 至此微分幾何進入了嶄新的時代, 在 Gauß 的基礎上 Riemann

指出一個值得追求的方向 (參「論幾何學的基礎假設」, 原文 *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, 1854) (註 2), 之後數學家們歸結出流形 (manifold) 的面貌, 並且從對流形的研究中得到許多美妙的結果。

在這本《初等微分幾何講稿》(以下簡稱《講稿》) 中, 作者就像一位與讀者對話的好朋友一樣, 分享一個興味十足的好故事 (當然, 也需要讀者配合耐心與毅力學習其中種種巧妙); 在經過了引人入勝的「絕妙定理」啟發之後, 聯繫曲面 (流形) 局部和整體性質的 Gauß-Bonnet 定理就是故事的高潮了 (這個吸引讀者回味再三的劇情還會在《大域微分幾何》中卷的 Gauß-Bonnet-Chern 定理再度出現, 而且更深入卻又簡潔美麗)。從《講稿》的字裡行間不難體會作者的主要企圖正是讓讀者對 Euler、Lagrange、Gauß、Riemann、Poincaré ⋯ 等偉大心靈的美妙想法, 用白話淺顯的方式小酌品嚐而逐步感受數學的醍醐味。

我的閱讀經驗

初入微分幾何這片天地, 我使用的書是 M. do Carmo 的《*Differential Geometry of Curves & Surfaces*》以及 B. O'Neill 的《*Elementary Differential Geometry*》(這兩本書在台灣大專院校的數學系也算是通用風行的教科書); 前者使用經典的微積分和線性代數工具, 雖然詳細但是讀下去我仍然感受不到爲何「絕妙定理」會是古典微分幾何最重要的入門定理 (我第一次老老實實一口氣把 do Carmo 從頭讀到該書第四章的 the intrinsic geometry of surfaces, 看完證明也自己做了一些習題, 雖然會做了還是不大理解爲什麼 Gauß 發現這個定理可以讚其妙哉); O'Neill 則剛好相反, 它在每一章節末有給出關鍵的精簡摘要, 我認真地看了, 理智上知道「妙處」在何方, 仍然沒有像讀畢 Cantor 集合論 (舉例來說, 如果能用 bijection 的觀念來思考集合的元素個數有多少, 可以得出有理數集爲可數但實數集爲不可數這樣的結論) 那種欣喜若狂的感受。

後來在台大數學的網站上發現這本《講稿》的推薦, 就從圖書館借來好好研讀, 看著看著 (大約反覆翻閱一個星期) 有了一個層次上跳躍的領悟 (見《講稿》, p.73-74) (註3)— 設想自己是那隻二維世界的「假想螞蟻」, 突然馬上體會到這樣的螞蟻是感知不到曲面以外的空間! 因此 do Carmo 書中第三章以使用 Gauß 映射的方法來計算 Gauß 曲率對螞蟻而言是無能爲力的; 「絕妙定理」精妙處在於 Gauß 曲率完全可以僅從曲面上的度量 (實際上是曲面的各切平面上的內積) 計算得出而不需要知道任何外在空間的資訊, 因此螞蟻的確能透過測量而知悉自己所在的空間 (即那張曲面) 是否是彎曲及彎曲程度!! (第 73 頁的兩句話瞬間讓我有非常欣喜的反映 —「第一基本型式決定了曲面的內在構造, 第二基本型式決定了曲面的外在行爲」), 那種感受就像是讀懂 Cantor 的集合論巧妙證明一樣令人內心雀躍且體會數學的美妙 — 難怪 Gauß 爲此定理命名如斯!

如此再將講稿細細品嚐, 發現它藉著一個又一個具啟發性的問題讓讀者去思考, 但又反覆

在重點上指引初學者值得注意的方向 (例如, 在曲線篇第二章論題二給出 Schwarz lantern 來探索曲面面積的定義); 對於古典微分幾何中的另一里程碑 Gauß-Bonnet 定理由淺入深地解說, 先從曲面篇第六章再到第七章的 Poincaré-Hopf 定理, 讀者漸漸地就能體會大域微分幾何那種結合局部和整體拓樸性質的研究取向。曲面篇第八章到第十章的內容對於邁入《大域微分幾何》是合適的預覽和準備; 其中第十章的外微分是這方面很好的入門介紹, 從微積分中的基本觀念出發再用線積分的例子說明微分型在座標變換下的不變性。

後記

《講稿》在許多老朋友的心目中有著特殊的學習經驗回憶, 不少我認識的學長姐或師長、朋友們大學時初學微分幾何正是參考了這本可愛的小書, 如今能再次出版讓人非常喜悅; 這是關於近代微分幾何中數學家們透過大膽地想像與創造以及不懈努力所留下的故事,《講稿》簡潔明快的說理吸引讀者繼續深入探索這故事與幾何的奧秘; 也希望有更多新朋友因爲這本書獲益匪淺, 如同我所經歷過的美好經驗一樣。

Die bezaubernden Reize dieser erhabenen Wissenschaft enthüllen sich nur jenen, die den Mut haben, sie in ihrer Tiefe zu erforschen.

Carl Friedrich Gauß

The enchanting charms of this sublime science reveal only to those who have the courage to go deeply into it.

Carl Friedrich Gauß

註 1: 可參考 Struik (《講稿》, p.229 參考資料的 [ST]) 一書中的 p.53-54, p.105-106 關於 Monge 和 Gauß 在微分幾何發展中的歷史簡介; 非歐幾何則可以參考 Struik 同同一書的 p.150-153。《講稿》的 p.182 的 [例 2] 亦有介紹關於非歐平面的 Poincaré model。

註 2: Riemann 的這篇劃時代的論文, 可參考 Spivak 的 vol.2 (《講稿》, p.229 參考資料的 [SP]) 之 p.151-162, Spivak 在該書隨後還有解說。

註 3: 可參《大域微分幾何》上卷的 p.17, 類似的生動解說再次出現。

—本文作者曾就讀於台大數學所, 現任職於傳統產業—