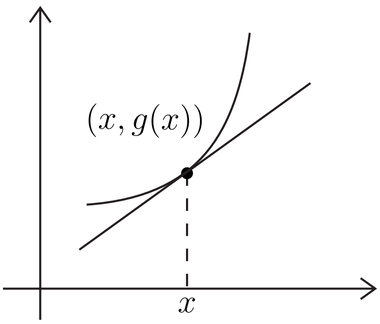
數學傳播 45卷2期, pp. 12-17

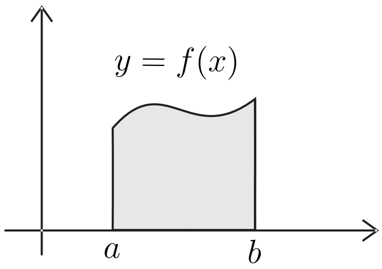
教高中生微積分基本定理

張海潮

如圖一所示, 微分是求函數 $y=g(x)$ 圖形上一點切線的斜率 $g'(x)$。

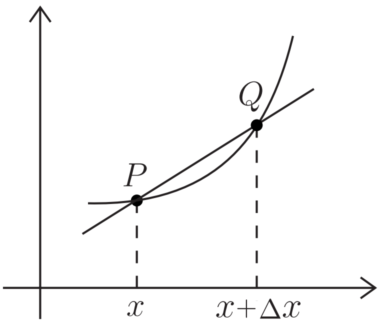


圖一



圖二

而當 $f(x)>0$ 時, 積分則是求 $y=f(x)$ 函數圖形下方, x 軸上方之間的面積, 如圖二所示, 陰影部份代表介於 $x=a$, $x=b$, x 軸和函數圖形之間的面積 (註一)。在圖一的情形, 求一條直線的斜率, 需要知道兩點, 因此作法是在圖形上除了點 $P(x, g(x))$ 之外, 另在附近取一點 $Q(x+\Delta x, g(x+\Delta x))$, 如圖三所示 (註二)。



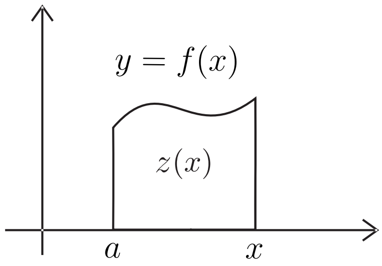
圖三

先求 PQ 線的斜率

$$\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{(x+\Delta x)-x}=\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

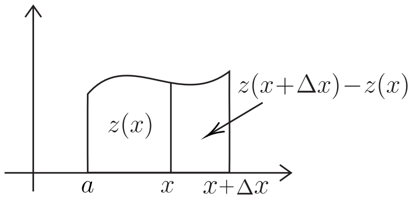
然後再令 Δx 趨近於 $0(\Delta x \to 0)$, 將所得的極限定為切線的斜率 $g'(x)$。式 (1) 一方面是圖三中割線 PQ 的斜率, 另一方面式 (1) 也代表當 x 變動到 $x + \Delta x$ 時, $g(x)$ 的平均變率 (average rate of change), 而當 $\Delta x \to 0$ 時, 式 (1) 的極限便是 $g(x)$ 在 x 點的瞬間變率 $g'(x)$ (Instantaneous rate of change at x)。

平均或是瞬間變率的考量可以針對任意的函數 $g(x)$, 一旦能夠掌握 $\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$ 在 $\Delta x \to 0$ 的極限 $g'(x)$ 便可以從 $g'(x)$ 反求 $g(x)$, 這正是牛頓當年發現微積分基本定理的切入點。牛頓首先將圖二改成圖四 (註三)。

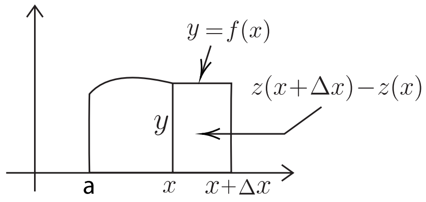


圖四

圖四是連續函數 $y=f(x)$ 的圖形從 a 到 x 這一段與 x 軸之間的面積, 在 x 這一點, 函數 $y=f(x)$ 是高度, 面積以函數 $z=z(x)$ 表。牛頓的想法是求面積函數 $z(x)$ 在 x 點的瞬間變率。欲求 $z(x)$ 的瞬間變率, 必須先求平均變率, 因此牛頓考慮下面的圖五 (並見註三)。當 x 變化到 $x+\Delta x$ 時, 從 a 到 $x+\Delta x$ 的面積是 $z(x+\Delta x)$ 而 $z(x+\Delta x)-z(x)$ 就是圖五中在 $[x, x+\Delta x]$ 上方的面積, 因此平均變率等於 $\dfrac{z(x+\Delta x)-z(x)}{\Delta x}$。如果函數 y 在 $[x, x+\Delta x]$ 上是常數的話, 則 $z(x+\Delta x)-z(x)$ 這塊面積是一個以 y 為高度的長方形, 如圖六所示:



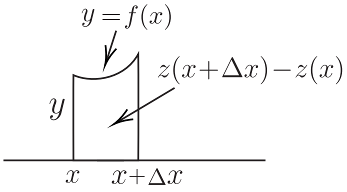
圖五



圖六

在圖六的情形, 不論 Δx 的大小, $\dfrac{z(x+\Delta x)-z(x)}{\Delta x}$ 都等於長方形面積 $z(x+\Delta x)-z(x)$ 的高, 令 $\Delta x \to 0$, 自然得到 $z(x)$ 對 x 的瞬間變率是此長方形的高, 即 $f(x)$。

一般而言面積 $z(x+\Delta x)-z(x)$ 這一塊並非長方形而是形如圖七:



圖七

在圖七中, 令 H 和 h 分別是函數 $y=f(x)$ 在 $[x,x+\Delta x]$ 上的最大值和最小值, 則顯然有 (註四)

$$h\le \frac{z(x+\Delta x)-z(x)}{\Delta x}\le H.$$

當 $\Delta x\to 0$ 時, H 和 h 都會趨近 $f(x)$, 因此 $\dfrac{z(x+\Delta x)-z(x)}{\Delta x}$ 也會趨近 $f(x)$, 亦即 $z(x)$ 對 x 的瞬間變率是 $f(x)$, 或者說 $z'(x)=y=f(x)$。這就是當年牛頓發現的微積分基本定理 (註五)。

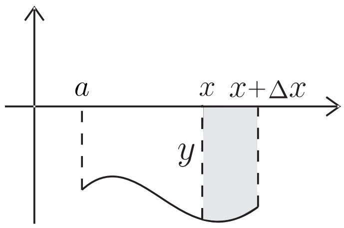
根據此一定理, 我們有下列結論:

如圖二所示, 令 $F(x)$ 滿足 $F'(x)=f(x)$, 則圖二中的面積等於 $F(b)-F(a)$。原因是, 因爲如圖四, $z'(x)=f(x)$, 如果 $F'(x)$ 也等於 $f(x)$, 則 $z(x)=F(x)+c$, c 是一個常數 (註六)。圖二中的面積等於 $z(b)$, 注意到 $z(a)=0$, 所以

$$z(b)=z(b)-z(a)=F(b)+c-(F(a)+c)=F(b)-F(a).$$

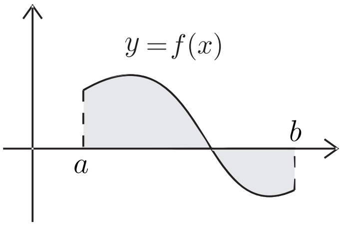
雖然滿足微分是 $f(x)$ 的函數並不唯一, 但是因爲這些「反微分」彼此只差一個常數, 在計算 $F(b)-F(a)$ 時, 所差的常數自然會對消, 因此並不重要 (註七)。

以下, 我們補充當 $f(x)$ 不一定恆正時圖四中的面積函數 $z(x)$ 應該如何定義。如圖八, 當 $f(x)$ 在某一區段小於 0 時, 從 x 到 $x+\Delta x$, 陰影部份的面積若是除以 Δx, 得到的「高度」是正的, 而非 $y=f(x)$ (此處 $f(x)<0$), 因此一個合理的面積函數 $z(x)$ 在圖八中應該計以負值, 如此 $z(x+\Delta x)-z(x)<0$, 而 $\dfrac{z(x+\Delta x)-z(x)}{\Delta x}$ 也小於 0, 並且當 $\Delta x\to 0$ 時, $\dfrac{z(x+\Delta x)-z(x)}{\Delta x}$ 會趨近於 $y=f(x)$, $f(x)$ 也小於 0。



圖八

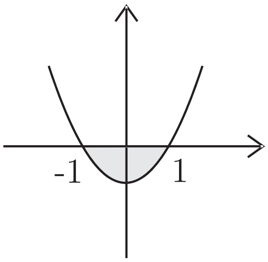
如此一來, 只要將 $f(x) < 0$ 時的「面積」計以負值, 則微積分基本定理仍然成立, 如圖九



圖九

函數 f 有正有負, 當 $f(x) > 0$ 時陰影部份面積以正計之, 而 $f(x) < 0$ 時陰影部份面積以負計之, 則總面積仍然會等於 $F(b) - F(a)$, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的反微分 (註八)。

換句話說, 只要將 $f(x) < 0$ 的部份, 面積以負計, 則微積分基本定理仍然成立 (利用 $f(x)$ 的任一個反微分 $F(x)$, 圖九的陰影部份「面積」皆等於 $F(b) - F(a)$)。讀者不妨試試下面這個函數 $y = x^2 - 1$, 其在 $[-1, 1]$ 這一段的「面積」計算。



圖十

若以反微分 $\frac{1}{3}x^3 - x = F(x)$ 代 1 和 -1 相減,

$$F(1) = \frac{1}{3} - 1, \tag{2}$$

$$F(-1) = -\frac{1}{3} + 1, \tag{3}$$

$$F(1) - F(-1) = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}, \tag{4}$$

$-\frac{4}{3}$ 恰是圖十中陰影部份面積取負號。

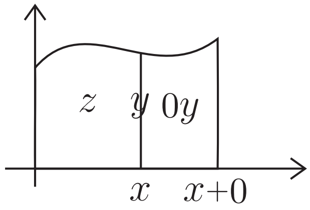
總之, 微分是求函數圖形切線的斜率, 積分是求圖形與 x 軸之間的「面積」, 這面積兩字需要打一引號「 」, 來說明「面積」是要考慮正負的。唯有如此, 微積分基本定理才會廣泛的成立。因此, 可能如註八, 得到「面積」爲 0 時, 原因不過是正的面積和負的面積對消, 一點也不奇怪。

註一: 此處暫時假設 $f(x) > 0$, 以便處理 $y = f(x)$ 函數圖形與 x 軸之間的面積, 將來, 當

$f(x)<0$ 時, 會引進「負的面積」的概念。並見註八。

註二: Δx 代表一個微小的量, 可正可負, 但是不能等於 0, 本文爲了方便說明, Δx 均大於 0。

註三: 莫里斯 · 克萊因著古今數學思想 (Morris Kline, *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*) 中譯本 69 頁重現了牛頓所畫的圖



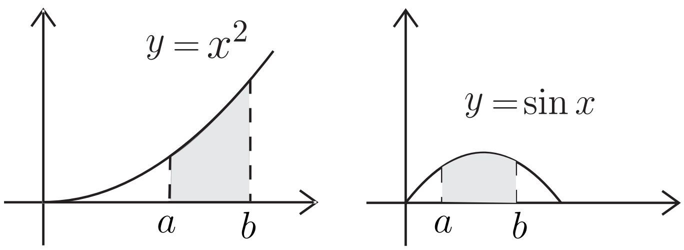
圖中的記號 “0” 相當於現在的 Δx。

註四: 此處用到連續函數 f 在閉區間 $[x, x+\Delta x]$ 上有最大值和最小值, 並且當 $\Delta x\to 0$ 時, 最大和最小值均趨近 $f(x)$。

註五: 一般認爲萊布尼茲亦獨立發現此定理。

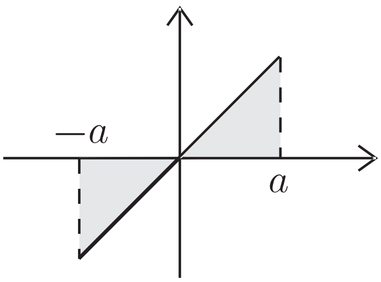
註六: 微分等於 $f(x)$ 的函數統稱是 $f(x)$ 的反微分或反導函數, $f(x)$ 的所有反微分彼此只差一個常數, 圖五中的面積函數 $z(x)$ 是 $f(x)$ 的一個特別的反微分, 它滿足 $z(a)=0$。

註七: 多項式 x^n 的反微分是 $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+c$, c 是任意常數。三角函數 $\sin x$ 的反微分是 $-\cos x+c$, c 是任意常數。下面二個函數圖形陰影部份的面積分別是 $\dfrac{1}{3}b^3-\dfrac{1}{3}a^3$ 和 $\cos a-\cos b$。



註八: 簡言之, 若面積在 x 軸上方以正計, 在 x 軸下方以負計, 則「面積」仍然等於 $F(b)-F(a)$。式中 $F(x)$ 是函數 $f(x)$ 的反微分。以 $f(x)=x$ 爲例, 下圖的面積 0。此時若取

$F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + c$, 則 $F(a) - F(-a)$ 亦等於 0。



—本文作者爲台大數學系退休教授—