數學傳播 45卷2期, pp. 18-20

# 從運動學的觀點看描繪函數圖形的教學

張海潮

無論是在高三下自然組的 (多項式) 微積分課或是大一上期中考之前的微積分, 描繪 $y=f(x)$ 的函數圖形都是教學的重點。

通常教師會提示描繪的前置作業, 要求學生逐步完成下列步驟:

(一) 計算 $f'(x)$, 將定義域分解成 $f'>0$, $f'<0$ 的區間, 並同時紀錄臨界點, 即 $f'(x)=0$ 的點。

(二) 讓學生了解在 $f'>0$ $(f'<0)$ 的區間上, $f(x)$ 的圖形是遞增 (遞減) 的。

(三) 對每一個臨界點, 在其左、右判斷 $f'$ 的正負, 來決定該點是否確是極大值或極小值。

(四) 計算 $f''(x)$, 將定義域分解成 $f''>0$, $f''<0$ 的區間, 並同時紀錄 $f''(x)=0$ 的解。

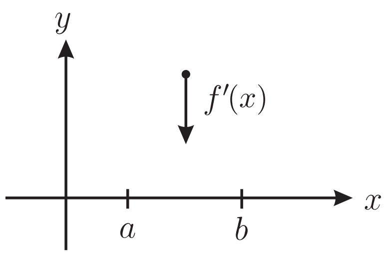
(五) 讓學生了解在 $f''>0$ 的區間上, $f(x)$ 的圖形是上凹或凹口向上, 而在 $f''<0$ 的區間, 圖形是下凹或凹口向下。

(六) 對 $f''(x)=0$ 的解, 在其左右判斷 $f''$ 的正負, 如果正負號相反, 則稱此點是一個反曲點。

(三)$'$ 如果臨界點處, 凹口向下, 便是極大值, 而若凹口向上, 便是極小值。

本文的目的是想從平面運動直觀的來看函數圖形的屬性, 主要是要理解上述 (二) 、(五) 兩個步驟。我們把 $y=f(x)$ 的函數圖形看成是質點在坐標平面上的運動軌跡, $x$ 想成是時間, 運動軌跡是 $(x,f(x))$, 即水平運動是 $x$, 鉛垂方向的運動是 $f(x)$。速度向量是 $(x,f(x))$ 對時間 $x$ 的微分, 即 $V=(1,f'(x))$, 加速度向量是速度向量對 $x$ 的微分, 因此是 $A=(0,f''(x))$。

先說步驟 (二) 。假設在時段 $(a,b)$ 上, $f'(x)<0$, 這代表鉛垂速度小於 0, 因此是下墜的情形, 如圖一所示：

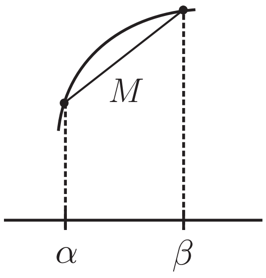



圖一

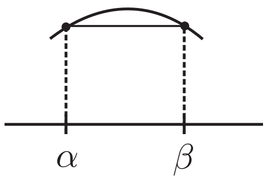
當時間 $x$ 進行, 質點在水平方向以速度 1 向右前進, 而相關的鉛垂速度始終小於 0, 代表持續下墜, 因此鉛垂的位置 $f(x)$ 也處於遞減的狀態。同理, 若是 $f'(x)$ 在時段上 $(a,b)$ 恆正, 就代表鉛垂的位置 $f(x)$ 處於遞增。

接下來談步驟 (五) , 當 $f''(x)$ 在時段 $(a,b)$ 上小於 0 時, 我們要解釋函數圖形 (或平面運動軌跡) 爲什麼凹口向下。

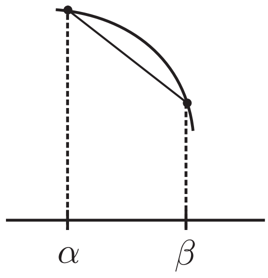
首先, 我們以線段 $M$ 連接 $(\alpha,f(\alpha))$ 和 $(\beta,f(\beta))$, 其中 $a<\alpha<\beta<b$。此時, 圖形分成三種情形, 分別是 $f(\alpha)<f(\beta)$, $f(\alpha)=f(\beta)$ 和 $f(\alpha)>f(\beta)$, 如圖二、三、四所示:



圖二



圖三



圖四

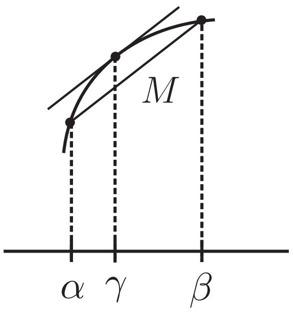
我們以圖二爲例來說明現象 (五.1) (圖三、四的說明類似):

(五.1) 在時段 $(a,b)$, 如果 $f''(x)$ 恆負, 則上述連接 $(\alpha,f(\alpha))$ 和 $(\beta,f(\beta))$ 的線段 $M$, 除了端點, 均落在函數圖形 (運動軌跡) 的下方。注意到圖二, 在時段 $(\alpha,\beta)$, 鉛垂方向從 $f(\alpha)$ 上升到 $f(\beta)$, 平均速度是線段 $M$ 的斜率: $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$。因爲 $f''(x)<0$, 因此 $f'(\alpha)$ 一路遞減到 $f'(\beta)$, 而有

$$f'(\alpha)>\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}>f'(\beta), \tag{1}$$

((1) 式對圖三、四也同樣成立)

從 (1) 式可以合理宣稱在 $\alpha,\beta$ 之間有 $\gamma$ 滿足 $f'(\gamma)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (註), 亦即在 $(\gamma,f(\gamma))$ 的切線與 $M$ 平行, 如圖五所示:



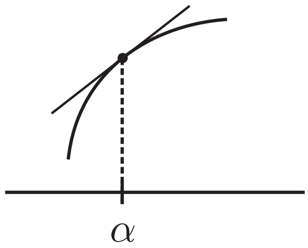
圖五

因此, 鉛垂方向的速度從 $f'(\alpha)$ 遞減到平均速度 $f'(\gamma)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ 又再遞減到 $f'(\beta)$, 而相應的鉛垂位置從 $f(\alpha)$ 變化到 $f(\beta)$。

在討論函數圖形和線段 $M$ 的關係時, 一方面將圖形看成軌跡 $(x,f(x))$, 另一方面將 $M$ 看成是等速直線運動 $\Big(x,f(\alpha)+\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\Big)$ 的軌跡, 後者的鉛垂速度是前者的鉛垂平均速度 $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, $x$ 均代表時間。我們要比較同一時間兩個運動的鉛垂位置差。不難看出, 在時間 $\alpha$ 時, 及 $\alpha$ 後 $\gamma$ 前, 前者的鉛垂速度比較大, 因此鉛垂位置差逐漸加大, 而到了時間 $\gamma$ 及 $\gamma$ 後, 鉛垂位置差逐漸縮小, 最後到了時間 $\beta$, 兩者的位置再度重合。

從以上的論証, 不難看出在圖五中, 線段 $M$ 完全落在圖形的下方, 這是 $f''$ 恆負的結果。

另外, 如果在圖五中, 令 $\beta$ 趨近 $\alpha$, 則 $M$ 趨近過 $(\alpha,f(\alpha))$ 的切線, 如圖六所示:



圖六

我們因此看到下面的現象

(五.2) 當 $f''(x)$ 在時段 $(a,b)$ 恆負時, $\alpha\in(a,b)$, 則在 $(\alpha,f(\alpha))$ 的切線會完全在圖形 $y=f(x)$ 的上方。

(五.1) 和 (五.2) 合併, 以圖形和切線及割線的上下關係說明了當 $f''$ 恆負時, 凹口向下的現象。當然, 當 $f''$ 恆正時, 同理會有凹口向上的情形。

以上是對圖形遞增 $(f'>0)$ 遞減 $(f'<0)$ 上凹 $(f''>0)$ 下凹 $(f''<0)$ 利用平面運動的說明, 雖然不很嚴謹, 但是希望在教學現場可以透過鉛垂的速度 $f'$ 和加速度 $f''$ 來了解函數圖形的幾何特徵。

**註**: 當 $f'(\alpha)>\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}>f'(\beta)$, 導出必有 $\gamma$, $\alpha<\gamma<\beta$ 使 $f'(\gamma)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, 稱爲連續函數 (此處是 $f'$) 的介值定理 (Intermediate Value Theorem), 其內容和高中學的勘根定理是一樣的。

—本文作者爲台大數學系退休教授—