數學傳播 45卷3期, pp. 74-76

雙曲線上相異四點的斜率相關不變量

郭品增 · 蔡一全 · 連家堯

一、前言

若 A、B、C、D 爲圓上的相異四點 (逆時針排列), 則 $\tan(\angle BAC)=\tan(\angle BDC)$, 可得:

$$\frac{m_{\overline{AC}}-m_{\overline{AB}}}{1+m_{\overline{AC}}\times m_{\overline{AB}}}=\frac{m_{\overline{DC}}-m_{\overline{DB}}}{1+m_{\overline{DC}}\times m_{\overline{DB}}},$$

其中 $m_{\overline{AB}}$ 爲直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的斜率, 其餘類推。我們稱此關係式爲圓上相異四點的「斜率相關不變量」。我們可將圓: $x^2+y^2=a^2$ 經平面轉換矩陣 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{b}{a}\end{bmatrix}$ 映射爲橢圓: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 所以橢圓亦有相似的性質。本文將探討在雙曲線: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的「斜率相關不變量」。

二、本文

我們使用參數式 $R\Big(a\times\dfrac{e^t+e^{-t}}{2},b\times\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\Big)$、$L\Big(-a\times\dfrac{e^t+e^{-t}}{2},b\times\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\Big)$ 分別來表示雙曲線: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 右支及左支上的點。定義函數 F 滿足: $F(R)=e^t$、$F(L)=e^{-t}$。

引理 1.1: 若

$$A\Big(a\times\frac{e^{t_1}+e^{-t_1}}{2},b\times\frac{e^{t_1}-e^{-t_1}}{2}\Big)、B\Big(a\times\frac{e^{t_2}+e^{-t_2}}{2},b\times\frac{e^{t_2}-e^{-t_2}}{2}\Big)$$

爲雙曲線: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 右支上的相異兩點, 則 $\dfrac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}+1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}-1}=e^{t_1+t_2}=F(A)\times F(B)$。

證明:

$$m_{\overline{AB}}=\frac{b}{a}\times\frac{(e^{t_1}-e^{t_2})-(e^{-t_1}-e^{-t_2})}{(e^{t_1}-e^{t_2})+(e^{-t_1}-e^{-t_2})}=\frac{b}{a}\times\frac{(e^{t_1}-e^{t_2})-\frac{e^{t_2}-e^{t_1}}{e^{(t_1+t_2)}}}{(e^{t_1}-e^{t_2})+\frac{e^{t_2}-e^{t_1}}{e^{(t_1+t_2)}}}=\frac{b}{a}\times\frac{1+e^{-(t_1+t_2)}}{1-e^{-(t_1+t_2)}},$$

$$\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}+1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}-1}=\frac{\left[\frac{2}{(1-e^{-(t_1+t_2)})}\right]}{\left[\frac{2e^{-(t_1+t_2)}}{1-e^{-(t_1+t_2)}}\right]}=e^{t_1+t_2}=e^{t_1}\times e^{t_2}=F(A)\times F(B)。$$

引理 1.2: 若

$$A\Big(-a\times\frac{e^{t_1}+e^{-t_1}}{2},b\times\frac{e^{t_1}-e^{-t_1}}{2}\Big)、B\Big(-a\times\frac{e^{t_2}+e^{-t_2}}{2},b\times\frac{e^{t_2}-e^{-t_2}}{2}\Big)$$

爲雙曲線: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 左支上的相異兩點, 則 $\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}+1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}-1}=e^{(-t_1-t_2)}=F(A)\times F(B)$。

證明:

$$\begin{aligned}m_{\overline{AB}}&=-\frac{b}{a}\times\frac{(e^{t_1}-e^{t_2})-(e^{-t_1}-e^{-t_2})}{(e^{t_1}-e^{t_2})+(e^{-t_1}-e^{-t_2})}=-\frac{b}{a}\times\frac{(e^{t_1}-e^{t_2})-\frac{e^{t_2}-e^{t_1}}{e^{(t_1+t_2)}}}{(e^{t_1}-e^{t_2})+\frac{e^{t_2}-e^{t_1}}{e^{(t_1+t_2)}}}\\&=-\frac{b}{a}\times\frac{1+e^{-(t_1+t_2)}}{1-e^{-(t_1+t_2)}},\end{aligned}$$

$$\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}+1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}-1}=e^{(-t_1-t_2)}=e^{-t_1}\times e^{-t_2}=F(A)\times F(B)。$$

引理 1.3: 若

$$A\Big(a\times\frac{e^{t_1}+e^{-t_1}}{2},b\times\frac{e^{t_1}-e^{-t_1}}{2}\Big)、B\Big(-a\times\frac{e^{t_2}+e^{-t_2}}{2},b\times\frac{e^{t_2}-e^{-t_2}}{2}\Big)$$

爲雙曲線: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 右支及左支上的點, 則

$$\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}+1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}-1}=-e^{(t_1-t_2)}=-F(A)\times F(B)。$$

證明:

$$m_{\overline{AB}}=\frac{b}{a}\times\frac{(e^{t_1}-e^{t_2})-(e^{-t_1}-e^{-t_2})}{(e^{t_1}+e^{t_2})+(e^{-t_1}+e^{-t_2})}=\frac{b}{a}\times\frac{(e^{t_1}-e^{t_2})+\frac{e^{t_1}-e^{t_2}}{e^{(t_1+t_2)}}}{(e^{t_1}+e^{t_2})+\frac{e^{t_1}+e^{t_2}}{e^{(t_1+t_2)}}}=\frac{b}{a}\times\frac{e^{t_1}-e^{t_2}}{e^{t_1}+e^{t_2}},$$

$$\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}+1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}-1}=-e^{(t_1-t_2)}=-e^{t_1}\times e^{-t_2}=-F(A)\times F(B)。$$

定義: $\operatorname{sign}(A,B)=\begin{cases}1, & \text{若 } A,B \text{ 兩點同時在雙曲線的右支或左支上,}\\ -1, & \text{若 } A,B \text{ 兩點不在雙曲線的同一分支上。}\end{cases}$

由引理 1.1、引理 1.2、引理 1.3 得知: 若 A、B 爲雙曲線: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的兩點, 則

$$\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}+1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}-1}=F(A)\times F(B)\times\operatorname{sign}(A,B)。$$

引理 1.4: 設 A、B、C 爲雙曲線: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的相異三點, 則

$$\Big(\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}+1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}-1}\Big)\times\Big(\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AC}}-1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AC}}+1}\Big)=\frac{F(B)}{F(C)}\times\operatorname{sign}(B,C)。$$

證明: 由引理 1.1、引理 1.2、引理 1.3 得知:

$$\left(\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}+1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}-1}\right)\times\left(\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AC}}-1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AC}}+1}\right)=\frac{F(A)\times F(B)\times \mathrm{sign}(A,B)}{F(A)\times F(C)\times \mathrm{sign}(A,C)}$$
$$=\frac{F(B)}{F(C)}\times \mathrm{sign}(B,C),$$

得證。

定理 1: 設 A、B、C、D 爲雙曲線: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 上的相異四點, 則

$$\left(\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}+1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}-1}\right)\times\left(\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AC}}-1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AC}}+1}\right)=\left(\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{DB}}+1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{DB}}-1}\right)\times\left(\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{DC}}-1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{DC}}+1}\right)。$$

證明: 由於圖形上兩點的斜率在平移後並不會改變, 不失一般性, 設雙曲線爲 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$。由引理 1.4 得知:

$$\left(\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}+1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AB}}-1}\right)\times\left(\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AC}}-1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{AC}}+1}\right)=\frac{F(B)}{F(C)}\times \mathrm{sign}(B,C),$$

此等式只與 B、C 兩點的座標有關, 與 A 點座標並無關係; 同理考慮 B、C、D 三點的情形, 可得

$$\left(\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{DB}}+1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{DB}}-1}\right)\times\left(\frac{\frac{a}{b}\times m_{\overline{DC}}-1}{\frac{a}{b}\times m_{\overline{DC}}+1}\right)=\frac{F(B)}{F(C)}\times \mathrm{sign}(B,C),$$

定理 1 得證。

特別感謝指導老師: 龔詩尹老師、楊昌宸老師。

参考文獻

1. hyperbola-Wikipedia。

—本文作者郭品增、蔡一全、連家堯投稿時爲彰化高中二年級學生—