數學傳播 46卷3期, pp. 49-54

用內積的形式計算向量及矩陣在不同基底下的表現

張海潮

一、引言

$\mathbb{R}^n$ 中兩個向量 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 和 $(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$ 的內積是 $\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\cdots+\lambda_n\mu_n$。內積也出現在 A,B 兩矩陣的相乘, 如果 $AB=(c_{ij})$, 則 c_{ij} 就是 A 的第 i 個列向量和 B 的第 j 個行向量的內積。以下, 我們常將內積的形式寫成

$$(\lambda_1\ \cdots\ \lambda_n)\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}$$

以反映矩陣的乘法。

如果向量 $e_1\cdots e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一組基底, 而 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$, 則線性組合 $\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n$ 也可以寫成

$$(e_1\ \cdots\ e_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\tag{1}$$

(當然也可以寫成 $(\lambda_1\ \cdots\ \lambda_n)\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}$, 在本文中我們只用 (1) 式。)

我們知道在線代的學習中, 有一些量是與選定的基底有關。例如一個向量的坐標表示是透過該向量對基底的線性組合。又例如一個線性變換的矩陣表示是記錄基底被映射之後, 對原基底的線性組合。

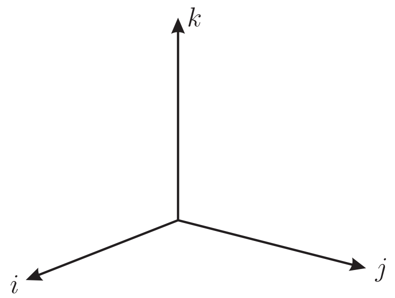
本文的目的在引入一個與內積有關的辦法來處理在不同的基底下, 上述基本量彼此之間的轉換。(註一)

二、規範(定義) 及公式

設有一個 n 維的實向量空間 V (例如 $\mathbb{R}^n$) 及 V 的基底。以下我們以 $v, e, f, \ldots$ 表示向量, 而以 $\lambda, \mu, a, b, \ldots$ 表示實數。假設在 V 中選了一組基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ (注意, 基底的排序是重要的, 若換了排序, 就是另一組基底。) 我們有下列的規範 (定義):

(一) 任一個向量 $v \in V$, $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$, $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 就稱爲 v 在基底 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 下的坐標。

例1: 以三度空間爲例, 取定了原點之後, 以右手定則定出三個互相垂直的單位向量i, j, k, 如圖:



則任一向量均可表成 $\lambda i + \mu j + \nu k$, (λ, μ, ν) 就是此向量的坐標。顯然 i, j, k 自身的坐標分別是 (1,0,0), (0,1,0) 和 (0,0,1)。

(二) 任一個 V 到 V 的線性變換 T, 若有 $T(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ 則 T 的矩陣表示爲:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

亦即 T 的第 j 個行向量 $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ 是 $T(e_j)$ 對原基底展開的係數。

例2: $V = \mathbb{R}^2$, 取基底爲 (1,0), (0,1), 如果 $T(1,0) = (a, b)$, $T(0,1) = (c, d)$, 則 T 相對基底 $(1,0), (0,1)$ 的矩陣表示就是

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

(三) 矩陣的行表現和列表現:

$$\text{以 } n=2 \text{ 爲例, } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

可以看成兩個行向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, 當然也可以看成兩個列向量 (a, c), (b, d) 的排列。我們把行向量看法記成 $\left(\Big| \quad \Big|\right)$, 而把列向量看法記成 $\begin{pmatrix} \overline{\quad\quad} \\ \\ \underline{\quad\quad} \end{pmatrix}$。

反之, 如果 e_1, e_2 是兩個向量, 則 $\left(\Big| e_1\ e_2 \Big|\right)$ 就看成是一個以 e_1, e_2 爲行向量的矩陣, 稱爲行表現, 而將 $\begin{pmatrix} \overline{e_1} \\ \underline{e_2} \end{pmatrix}$ 看成是一個以 e_1, e_2 爲列向量的矩陣, 稱爲列表現。

例 3: 如果 $e_1 = (a, b)$, $e_2 = (c, d)$ 則

$$\text{行表現 } \left(\Big| e_1\ e_2 \Big|\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \text{ 列表現 } \begin{pmatrix} \overline{e_1} \\ \underline{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}。$$

(四) 設有向量 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 及實數 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$, $\mu_1 \cdots \mu_n, \ldots$

$$\text{則定 } (e_1\ \cdots\ e_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_n e_n,$$

$$\text{以及 } (e_1\ \cdots\ e_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \\ \vdots & \vdots & \ldots \\ \lambda_n & \mu_n & \end{pmatrix} = (\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n, \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n, \ldots).$$

如此, 設矩陣 A 的行向量爲 $e_1, \ldots, e_n$, $AB = C$, 則

$$\begin{aligned} AB &= \left(\Big| e_1\ e_2\ \cdots\ e_n \Big|\right) B = (e_1\ \cdots\ e_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots \end{pmatrix} \\ &= \left(\Bigg| \sum_{i=1}^n b_{i1} e_i\ \sum_{i=1}^n b_{i2} e_i \cdots \Bigg|\right) \\ &= C \text{ 矩陣的行表現。} \end{aligned}$$

例4: 設 $AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=C=\begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix}$,

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\left(\Big|e_1\ e_2\Big|\right)$, 則 $AB=(e_1\ e_2)\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=(5e_1+7e_2, 6e_1+8e_2)$.

但 $5e_1+7e_2=5\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\43\end{pmatrix}$,

$6e_1+8e_2=6\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\50\end{pmatrix}$,

得到 $C=\begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix}$ 的行表現。

三、應用

以下均以 $n=2$ 爲例, 矩陣 A 的反矩陣以 A^{-1} 表,

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}.$$

應用1: 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 取基底 $e_1=(3,1)$, $e_2=(2,1)$

若 $(\lambda_1,\lambda_2)=\mu_1e_1+\mu_2e_2$, 求 (μ_1,μ_2)。

此時 $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}=\left(\Big|e_1\ e_2\Big|\right)\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}$,

因此 $\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}$.

得 $\mu_1=\lambda_1-2\lambda_2$, $\mu_2=-\lambda_1+3\lambda_2$.

應用2: $\mathbb{R}^2$ 中有兩組基底

$$\begin{cases}e_1=(3,1),\\e_2=(2,1),\end{cases}\qquad\begin{cases}f_1=(1,3),\\f_2=(1,4).\end{cases}$$

請將 f_1,f_2 寫成 e_1,e_2 的線性組合。

設 $(e_1,e_2)A=(f_1,f_2)$, A 是 2×2 矩陣。

取行表現 $\left(\Big| e_1\ e_2 \Big|\right) A = \left(\Big| f_1\ f_2 \Big|\right)$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

亦即 $(e_1, e_2) \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} = (f_1, f_2)$,

$f_1 = -5e_1 + 8e_2$,

$f_2 = -7e_1 + 11e_2$.

應用3: 承應用2.

若向量 $\mathrm{v} = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$.

已知 λ_1, λ_2, 求 μ_1, μ_2, $\mathrm{v} = (e_1\ e_2) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = (f_1\ f_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.

行表現 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$,

則 $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.

應用4: 根據本文第二節 (二), 在基底 $(e_1 \cdots e_n)$ 之下, 線性變換 T, 若以矩陣 A 表示

則 $(Te_1, Te_2, \ldots, Te_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)A$.

設 $n = 2$, 並且 $(e_1, e_2)B = (f_1, f_2)$ 是另一組基底,

則 $(Te_1, Te_2) = T(e_1, e_2) = (e_1, e_2)A$.

兩邊同乘 B, $T(e_1, e_2)B = (e_1, e_2)AB$,

$$\begin{aligned} T(e_1, e_2)B &= (f_1, f_2)B^{-1}AB, \\ T(f_1, f_2) &= (f_1, f_2)B^{-1}AB; \end{aligned}$$

亦即, 相對基底 (f_1, f_2), T 的矩陣表示變成 $B^{-1}AB$。

注意到, 從 A 變成 $B^{-1}AB$, 稱爲 A 被 B 或 B^{-1} 共軛, 因爲 A 和 $B^{-1}AB$ 具同樣的特徵多項式, 所以固有值 (eigenvalue) 不變, 行列式不變。

註一: 本文旨在提供一個計算的方法, 不能作爲一個完整的教材, 又, 本文的方法在某些教科書亦曾出現, 不能視爲筆者獨創。

—本文作者爲台大數學系退休教授—

勘誤表

第 44 卷第 1 期 (173號), 96 頁, Line -2。

$$S_r(n) = \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{r} C_i^{r+1}\cdot B_i\cdot n^{r+1-i}$$

應爲：

$$S_r(n) = \frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r} C_i^{r+1}\cdot B_i\cdot n^{r+1-i}$$

第 46 卷第 2 期 (182號), 76 頁, 參考文獻 [4]。

[4] 林琦焜。傅立分析與應用。滄海書局, 2010。

應爲：

[4] 林琦焜。傅立葉分析與應用。滄海書局, 2010。