即解 z_3，θ_3 使 $h^{-1} = g \circ f$

即

$$z_3 + e^{-i\theta_3}(z - z_3) = z_2 - e^{i\theta_2} z_2 + e^{i\theta_2}(z_1 - e^{i\theta_1} z_1 + e^{i\theta_1} z)$$

令 $z = 0$ 即得

$$\begin{cases} z_3 - e^{-i\theta_3} z_3 = z_2 - e^{i\theta_2} z_2 + e^{i\theta_2} z_1 - e^{i\,\theta_1+\theta_2}\, z_1 \\ e^{-i\theta_3} = e^{i\,\theta_1+\theta_2} \end{cases}$$

$$\therefore \qquad \theta_3 = -(\theta_1 + \theta_2) + 2h\pi$$

1. 在 $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = 1$ 時（即 $(\theta_1 + \theta_2)/2$ 爲平角之整數倍）

$$0 = z_2 - e^{i\theta_2} z_2 + e^{i\theta_2} z_1 - z_1$$

即 $$z_1 - z_2 = e^{i\theta_2}(z_1 - z_2)$$

但已設 $z_1 \neq z_2$，$\therefore e^{i\theta_2} = 1$，$e^{i\theta_1} = 1$

也就是 f，g 都是恆等函數，換句話說，只要 f 或 g 將平面搬動，h 就無解。

2. 在 $e^{i(\theta_1+\theta_2)} \neq 1$ 時

$$z_3 = \frac{z_2 - e^{i\theta_2} z_2 + e^{i\theta_2} z_1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)} z_1}{1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$

3. 欲知 z_3 的幾何意義，可作下列變形：

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{z_2 - z_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{1 - e^{i\,\theta_1+\theta_2}} + \frac{e^{i\theta_2} z_1 - e^{i\theta_2} z_2 + e^{i(\theta_1+\theta_2)} z_2 - e^{i(\theta_1+\theta_2)} z_1}{1 - e^{i\,\theta_1+\theta_2}} \\ &= z_2 + (z_1 - z_2)\frac{e^{i\theta_2}(1 - e^{i\theta_1})}{1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)}} \\ &= z_2 + (z_1 - z_2)\frac{e^{i\theta_2/2}(e^{-i\theta_2/2} - e^{i\theta_1/2})}{e^{-i(\theta_1+\theta_2)/2} - e^{i(\theta_1+\theta_2/2)}} \\ &= z_2 + (z_1 - z_2)\, e^{i\theta_2/2} \frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \end{aligned}$$

就是說 $z_3 - z_2$ 的長度是

$$|z_1 - z_2| \cdot \frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

輻角是 $$\arg(z_1 - z_2) + \frac{\theta_2}{2}$$

這件事可由圖二，用正弦定律證出。

4304（台大數學系韓良信教授解）

題目：

有 17 個球，假定無論任取一個後，剩下的 16 個都可以分爲重量相等的兩堆，每堆 8 個。試證此 17 個球的重量必然相同。

解：

令這 17 個球的重量爲 x_1，x_2，…… x_{17}，則從題意我們得到方程組

$$\sum_{i=1}^{17} \varepsilon_{ij} x_i = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots\cdots 17),$$

這裏當 $i=j$ 時，$\varepsilon_{ij} = 0$，但 $i \neq j$ 時 $E_{ji} = \pm 1$；而且對任何 $j = 1, 2, \cdots, 17$，當 $i \neq j$ 時有一半的 $\varepsilon_{ij} = +1$，另一半 $\varepsilon_{ij} = -1$。也就是 $\Sigma\, \varepsilon_{ij} = 0$（$j=1, 2, \cdots, 17$）。我們知道 $x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_{17}$ 會滿足上面的方程組。我們的問題是有沒有其他的解答？換句話說就是上面的齊次（*homogeneous*）方程組的解空間（*null space*）的次元（*dimension* 是否大於 1？也就是上面方程組的係數所成的行列的階數（*ranks*）是否低於 16。

但從底下的補助定理（*lemma*），我們立刻得到上面係數行列的階數是 16。也就是解空間是 1 次元。因此沒有 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{17}$ 以外的解答。

（**註：**由我們的證明可以看出把 17 換成任何正奇數，答案仍然一樣）

補助定理（這個補助定理已列爲本期的徵答問題）

假如 $n \times n$ 行列 A 的主對角線上的元素都是偶數，其他的元素都是奇數。那麼當 n 是偶數時 A 必定是 *non-singular*。但當 n 是奇數時 *singular* 和 *non-singular* 的情況均可發生。

書刊介紹

書　名：幸運夫人（修訂版）
譯　者：張　時
校　閱：戴久永
出　版：拾穗雜誌社

本書中譯本初版曾由戴久永教授於數學傳播第三卷第二期中介紹過。本書修訂版比初版有相當大的改進，其中包括所有數學上的專用名詞均改爲常用的中文譯名，從多數學家註以英文原名，並更正譯名或作必要的註譯。算式及符號也有多處修正，初版時的錯誤均一一訂正，最大的改變爲改成橫式編排。

機率在高中數學中是令許多學生頭痛的部份，而機率却又是數學上相當重要的分支，英國名詩人雪萊說「萬物莫不聽命於命運，巧合和機遇。」本書以深入淺出，活潑生動的筆調爲您作詳盡有趣的分析闡釋，是任何想對機率有所認識的人士不可不讀的好書。