$\frac{1}{89}$ 奇妙的費氏數列之一

林 炳 炎

Leonardo Fibonacei 費伯納西是十三世紀歐洲數學的創新者，是中世紀唯一閃耀的數學天才，他生於義大利比薩（Pisa），由於所處的環境，他被稱爲Leonardo Pisano或Leonardo of Pisa，他的父親在Bugia（今北非阿爾及利亞）經商，介紹給他印度——阿拉伯的計數系統（我們現今通用的阿拉伯數字）及計算方法，在一連串的旅行及硏究數學之後，他在1202 年寫了一本Liber Abaci，來介紹印度——阿拉伯數字及計算方法，這本書的方法很快的就取代了笨拙的羅馬計數法（六十進位法），在這本書裏有一題很有名的算術題目，題目是：籠子內有一對剛出生的小兔子，這對小兔子成長至二個月大時，會生一對小兔子，以後每個月生一對，籠子內的兔子都是這樣繁殖的，問一年後籠子內有多少對兔子？籠子內的兔子將依1，1，2，3，5，8，13，21，34，55…… 增加，這個數列就稱爲費氏數列，1963 年一群聖荷西數學教授創辦了費氏季刊，十九年後的今天，費氏季刊仍然在發行。費氏數列有很多奇妙的性質，本文將就$\frac{1}{89}$來討論一些會發生費氏小數的分數。

請大家看表一，上面一列是$\frac{1}{89}$的44 位循環小數，下面等式若去掉“0.”則爲依次序排列的費氏數列，費氏數列的第0項爲0，第1項爲1，第2項爲1，第3項爲2，第四項爲3，……，事實上，它是表示

$$\frac{1}{89}=0.01+0.001+0.0002+0.00003+0.000005+0.0000008+\cdots\cdots=\sum_{i=1}\frac{F_{i-1}}{10^{i}},$$

爲了驗證，只要將同一行的數字相加，一定會與上一列的數字相同，$\frac{1}{89}$居然產生一列費氏數列，您說奇怪不奇怪？有人可能以爲過了44 位小數後就不是這麼回事，本文將利用數學歸納法，來證明此式子在數學上是成立的。

一、費氏家族

看了上文就知道費氏數列的任一項是由前二項之和而成的，上面所提的費氏數列是狹義費氏數列，廣義的費氏數列猶如費氏家族，費氏家族所具備的遞廻數列特性是$F_{n+2}=aF_{n+1}+bF_{n}$，假定a，b，c，d皆爲整數，$F_0=c$，$F_1=d$，且$n\geq 2$，則F_n之型式如何？

由於$F_{n+2}=aF_{n+1}+bF_{n}$，所以顯然的不會是等差級數，當n很大時，費氏數列之後前兩項之比爲常數φ

設 $\varphi=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$，則 $\frac{1}{\varphi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}$

	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60		
$\frac{1}{89}=0.\dot{0}112$	35955	05617	97752	80898	87640	44943	82022	4719$\dot{1}$	01123	59550	56179			
$=0.0112$	358	233		4636	8	1	65580	141						
	13	37	7	750	25		26791	4296						
	21	6	10	121	393		4334	94437						
	3	4	987	19	6418		701	40873	3					
		55	1597	3	17811		113	49031	70					
		89	2584		51422	9	18	36311	903					
		144	418	1	8320	40	2	97121	5073					
			67	65	1346	269		48075	26976					
			10	946	217	8309		7778	74204	9				
			1	7711	35	24578		1258	62690	25				
				28657	5	70288	7	203	65011	074				
						92274	65	32	95128	0099				
						14930	352	5	33162	91173				
						2415	7817		86267	57127	2			
						390	88169		13958	38624	45			
						63	24598	6	2258	51433	717			
						10	23341	55	365	43529	6162			
									59	12867	29879			
									9	56722	02604	1		
									1	54800	87559	20		F_{60}

$F_{n+2}=aF_{n+1}+bF_n$ ……………①

$\dfrac{①}{F_{n+1}}\quad \dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}}=a+b\dfrac{F_n}{F_{n+1}}\quad \therefore\ \varphi=a+\dfrac{b}{\varphi}\quad \therefore\ \varphi^2-a\varphi-b=0$

解之得 $\varphi=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$ 　則 $F_n=\alpha\cdot\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n+\beta\cdot\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n$

以初期條件 $F_0=c$，$F_1=d$ 代入求 α，β 兩係數 $F_0=\alpha+\beta=c$

$F_1=\alpha\cdot\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)+\beta\cdot\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)=d$

解之得 $\alpha=\dfrac{c}{2}+\dfrac{2d-ac}{2\sqrt{a^2+4b}}$ 　$\beta=\dfrac{c}{2}-\dfrac{2d-ac}{2\sqrt{a^2+4b}}$

$F_n=\left(\dfrac{c}{2}+\dfrac{2d-ac}{2\sqrt{a^2+4b}}\right)\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{c}{2}-\dfrac{2d-ac}{2\sqrt{a^2+4b}}\right)\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n$ …②

這是費氏家族一般形象，給予某一 a，b，c，d 即代表某一狹義的費氏家族之分支，費氏家族中有二顯赫堂兄弟，一是大家比較熟悉的狹義費伯納西數列，在後面所附的參考資料中，諸位可以睹其眞面目；另一是路卡斯（Lucas）數列，沒有其堂兄那麼顯赫，本文將略做介紹。

(a) **費伯納西數列**（廣義以 F 表示，狹義以 f 表示）

當 $a=b=d=1$，$c=0$ 時，

$f_0=1$，$f_1=1$，$f_2=2$，$f_3=3$，$f_4=5$……

$f_n=\dfrac{1}{\sqrt5}\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\dfrac{1}{\sqrt5}\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$

順便一提的是，後面這個 f_n 式子是民國50年乙丁組入學考試題目，當年應考的朋友，對證明 f_n 是自然數，可能心有餘悸吧！

(b) **路卡斯數列**

當 $a=b=d=1$，$c=2$ 時，

$f_0=2$，$f_1=1$，$f_2=3$，$f_3=4$，$f_4=7$，$f_5=11$，……

$f_n=\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$

十九世紀初葉，法國數學家（Edouard Lucas）開始研究這個數列，故此數列以他命名。

二、神機妙算

在本節想透過數學歸納法來證明一恒等式，並由此導出產生上面奇怪結果的數學式子，有了這個式子，我們要多希奇古怪的費氏小數都有，看官，請繼續吧！

假定 B，N，m 皆爲整數，且由下式定義 $B^2=m+Ba+b\quad N=cm+dB+bc$

試證： $B^nN=m\sum\limits_{i=1}^{n+1}B^{n+1-i}F_{i-1}+BF_{n+1}+bF_n\ (n\geq 2)$ ……………③

對所有 $n\geq 0$，並證明 N 可被 B 整除。

證明：(1) 當 $n=0$ 時，式③變成

$$B^0N=m\sum_{i=1}^{0}B^{1-i}F_{i-1}+BF_1+bF_0$$

$$N = mB^0F_0 + BF_1 + bF_0 = mc + Bd + bc$$

與假設定義一致，故 $n=0$ 時，原式成立。

(2)　設 $n=k$ 時，原式乃成立

$$B^kN = m\sum_{i=1}^{k+1} B^{k+1-i}F_{i-1} + BF_{k+1} + bF_k \qquad \text{兩邊同乘以} B$$

$$B^{k+1}N = m\sum_{i=1}^{k+1} B^{k+2-i}F_{i-1} + B^2F_{k+1} + BbF_k$$

$$= m\sum_{i=1}^{k+1} B^{k+2-i}F_{i-1} + (m + Ba + b)F_{k+1} + BbF_k$$

$$= m\left[\sum_{i=1}^{k+1} B^{k+2-i}F_{i-1} + F_{k+1}\right] + B(aF_{k+1} + bF_k) + bF_{k+1}$$

$$= m\sum_{i=1}^{k+2} B^{k+2-i}F_{i-1} + BF_{k+2} + bF_{k+1}$$

∴　$n = k+1$ 亦成立，故得證。　又

$$N = cm + dB + bc = c(B^2 - Ba - b) + dB + bc$$

$$= B^2c - Bac - bc + dB + bc = B(Bc - ac + d)$$ ．故 N 恒被 B 整除。

$\dfrac{③式}{mB^{n+1}}$ 得 $\dfrac{N}{Bm} = m\sum\limits_{i=1}^{n+1} \dfrac{F_{i-1}}{B^i} + \dfrac{BF_{n+1} + bF_n}{mB^{n+1}}$

當　$n\to\infty$ 時，且 $\left|\dfrac{a \pm \sqrt{a^2+4b}}{2B}\right| < 1$　即　$\left|\dfrac{\varphi}{B}\right| < 1$　〔註〕

則　$\dfrac{BF_{n+1} + bF_n}{mB^{n+1}} \to 0$　∴　$\dfrac{N}{Bm} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{F_{i-1}}{B^i}$ ……………④

多漂亮的式子。

〔註〕一般而言 $B > \varphi$，詳後面例子。

三、古怪的小數

我們選一些數值代入④式，可以得到一些很古怪的小數，下面是其中一部分。

1. 令　$c=2$，$a=b=d=1$（這是路卡斯數列）　$B=10$

則　$m = B^2 - Ba - b = 10^2 - 10 - 1 = 89$

$N = cm + dB + bc = 2\times 89 + 10 + 2 = 190$

$$\frac{N}{Bm} = \frac{190}{10\times 89} = \frac{19}{89} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{L_{i-1}}{10^i}$$

$= 0.21347$
　　　　11
　　　　18
　　　　29……

2. 令　$c=0$，$a=b=d=1$（這是狹義費氏數列）　$B=-10$

則　$m = B^2 - Ba - b = (-10)^2 - (-10) - 1 = 100 + 10 - 1 = 109$

$N = cm + dB + bc = -10$

$$\frac{N}{Bm} = \frac{-10}{(-10)\times 109} = \frac{1}{109} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_{i-1}}{(-10)^i}$$

3. 令 $B=10^t$，t 爲整數，$c=0$，$a=b=d=1$

$\therefore\ m=B^2-Ba-b=10^{2t}-10^t-1$

$N=cm+dB+bc=0\cdot m+10^t+b\times 0=10^t$

$$\therefore\ \frac{N}{Bm}=\frac{10^t}{(10^{2t}-10^t-1)\times 10^t}=\frac{1}{10^{2t}-10^t-1}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_{i-1}}{10^{ti}}$$

$t=1$ 時 $$\frac{N}{Bm}=\frac{1}{10^2-10^1-1}=\frac{1}{89}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_{i-1}}{10^i}$$

$$=0.01+0.001+0.0002+0.00003+0.000005+0.0000008+0.00000013+\cdots\cdots$$

$$=0.011235955056\cdots\cdots$$

$t=2$ 時

$$\frac{N}{Bm}=\frac{1}{10^4-10^2-1}=\frac{1}{9899}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_{i-1}}{10^{2i}}=0.0001010203050813213455\cdots\cdots$$

$t=3$ 時

$$\frac{N}{Bm}=\frac{1}{10^6-10^3-1}=\frac{1}{998999}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_{i-1}}{10^{3i}}=0.000001001002003005008013\cdots\cdots$$

4. 令 $B=-10^t$，$c=0$，$a=b=d=1$

$m=B^2-Ba-b=10^{2t}+10^t-1\qquad N=cm+dB+bc=-10^t$

$$\frac{N}{Bm}=\frac{-10^t}{(-10^t)(10^{2t}+10^t-1)}=\frac{1}{10^{2t}+10^t-1}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_{i-1}}{(-10^t)^i}$$

$t=1$ 時 $$\frac{N}{Bm}=\frac{1}{10^2+10-1}=\frac{1}{109}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_{i-1}}{(-10)^i}$$

$t=2$ 時 $$\frac{N}{Bm}=\frac{1}{10^4+10^2-1}=\frac{1}{10099}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_{i-1}}{(-100)^i}$$

$t=3$ 時 $$\frac{N}{Bm}=\frac{1}{10^6+10^3-1}=\frac{1}{1000999}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_{i-1}}{(-1000)^i}$$

同樣的，選取適當的數值，我們可以得到如

$$\frac{19}{89},\ \frac{199}{9899},\ \frac{1999}{998999},\ \cdots\cdots\qquad -\frac{21}{109},\ -\frac{201}{10099},\ -\frac{2001}{1000999},\ \cdots\cdots$$

這種分數的費氏數列展開式，有趣吧！

參考資料

Fibonacci and Lucas Number" Verner E. Hoggatt, Jr.

The Fibonacci series in the decimal equivalents of fractions "

The decimal expansion of 1／89 *and related results* "

本文作者現任職於台灣電力公司