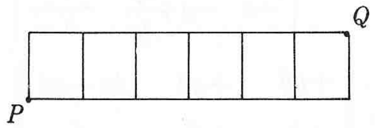
聯考試題解疑

洪經堯

來函

今年（七十三）大學暨獨立學院入學考試，自然組的數學試題〔戊〕，個人認爲有值得商榷之處，故借數學傳播季刊一角向諸位先進請教，我們先將題目重新敍述如下：

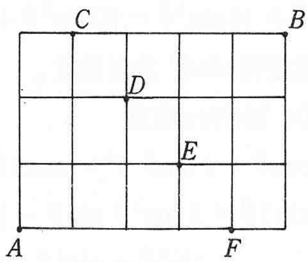
【戊】 有街道如下圖（每一小方格皆爲正方形），甲自P往Q，乙自Q往P，兩人同時出發，以相同速度，沿最短路線前進



假設在每一分叉路口時，選擇前進方向的機率都相等，問甲、乙二人在路上相遇的機率有多大？將所求的機率化爲形如$\frac{a}{2^n}$的最簡分數（即概約分數），其中n及a皆爲正整數。

我們把這個問題暫時擱下，先來看另一相似的例題。

【例】 設有棋盤街道如下圖形狀，今甲由A走向B，乙由B走向A，兩人同時同速走捷徑，試求甲、乙兩人在中途相遇的機率。



（Sol）：很明顯的，兩人同時同速走捷徑，如在中途相遇的話，必在C，D，E，F其中一點，在此提出三種不同的解法。

解一：

甲：由$A \to C \to B$的走法有

$$\frac{4!}{3!\ 1!} \times 1 = 4 \text{ 種}$$

由$A \to D \to B$的走法有

$$\frac{4!}{2!\ 2!} \times \frac{4!}{3!\ 1!} = 24 \text{ 種}$$

由$A \to E \to B$的走法有

$$\frac{4!}{3!\ 1!} \times \frac{4!}{2!\ 2!} = 24 \text{ 種}$$

由$A \to F \to B$的走法有

$$1 \times \frac{4!}{3!\ 1!} = 4 \text{ 種}$$

$$n(s) = 4 + 24 + 24 + 4 = 56 \text{ 種}$$

$\therefore$ 由$A\to C\to B$的機率$=\dfrac{4}{56}=\dfrac{1}{14}$

由$A\to D\to B$的機率$=\dfrac{24}{56}=\dfrac{6}{14}$

由$A\to E\to B$的機率$=\dfrac{24}{56}=\dfrac{6}{14}$

由$A\to F\to B$的機率$=\dfrac{4}{56}=\dfrac{1}{14}$

同理，

乙：由$B\to C\to A$的機率$=\dfrac{1}{14}$

由$B\to D\to A$的機率$=\dfrac{6}{14}$

由$B\to E\to A$的機率$=\dfrac{6}{14}$

由$B\to F\to A$的機率$=\dfrac{1}{14}$

故甲、乙兩人在中途相遇的機率

$$=\frac{1}{14}\times\frac{1}{14}+\frac{6}{14}\times\frac{6}{14}+\frac{6}{14}\times\frac{6}{14}+\frac{1}{14}\times\frac{1}{14}$$

$$=\frac{94}{196}=\frac{37}{98}$$

解二：

甲：由$A\to C$的走法有$\dfrac{4!}{3!\ 1!}=4$種

由$A\to D$的走法有$\dfrac{4!}{2!\ 2!}=6$種

由$A\to E$的走法有$\dfrac{4!}{3!\ 1!}=4$種

由$A\to F$的走法有$\dfrac{4!}{4!}=1$種

$n(s)=4+6+4+1=15$種

$\therefore$ 由$A\to C$的機率$=\dfrac{4}{15}$

由$A\to D$的機率$=\dfrac{6}{15}$

由$A\to E$的機率$=\dfrac{4}{15}$

由$A\to F$的機率$=\dfrac{1}{15}$

同理，乙亦然（略）

故甲、乙兩人在中點相遇的機率

$$=\frac{4}{15}\times\frac{1}{15}+\frac{6}{15}\times\frac{4}{15}+\frac{4}{15}\times\frac{6}{15}+\frac{1}{15}\times\frac{4}{15}$$

$$=\frac{56}{225}$$

解三：

甲：由$A\to C$之機率

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1+\frac{3!}{2!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$=\frac{5}{16}$$

由$A\to D$之機率

$$=\frac{4!}{2!\ 2!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$$

由$A\to E$之機率

$$=\frac{4!}{3!\ 1!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$$

由$A\to F$之機率$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$

同理，乙亦然（略）

故甲、乙兩人在中途相遇的機率

$$=\frac{5}{16}\times\frac{1}{16}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{16}\times\frac{5}{16}$$

$$=\frac{29}{128}$$

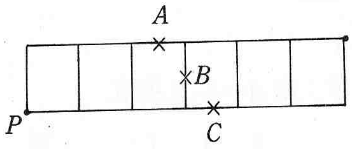
討論：

以上三種解法所得的結果不同，這是因爲（解一）與（解二）所取的「樣本空間」不同，而（解二）與（解三）的差異則是因（解二）。我們認定甲、乙兩人對街道的位置很清楚；（解三）則假設甲、乙兩人對街道位置都不清楚，但仍須遵守走捷徑的原則（這種說法似乎已有一點點矛盾），從上面說明，我們不難得知，如果我們將樣本空間取在$A\to B$上面，且

又假設甲、乙兩人對街道的位置不甚清楚的話，我們又可得出第四種不同的解法（從略）。

我們現在再來看今年自然組數學試題〔戊〕，有了上面例題的經驗，我們依樣畫葫蘆，再採用同樣的三種解法來解之。

（Sol）：因爲兩人同時同速沿最短路線前進，所以如在中途相遇，必在 A，B C 三點（如下圖）。



解一：

甲：由 $P\to A\to Q$ 的走法有

$$\frac{3!}{2!\times 1!}\times 1 = 3 \text{ 種}$$

由 $P\to B\to Q$ 的走法有 1 種

由 $P\to C\to Q$ 的走法有

$$1\times\frac{3!}{2!\times 1!} = 3 \text{ 種}$$

$$n(s) = 3+1+3 = 7 \text{ 種}$$

$\therefore$ 由 $P\to A\to Q$ 的機率 $=\dfrac{3}{7}$

由 $P\to B\to Q$ 的機率 $=\dfrac{1}{7}$

由 $P\to C\to Q$ 的機率 $=\dfrac{3}{7}$

同理乙亦然（略）

故甲、乙二人在中途相遇的機率

$$=\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}$$

$$=\frac{19}{49}$$

解二：

甲：由 $P\to A$ 的走法有 $\dfrac{3!}{2!\ 1!}=3$ 種

由 $P\to B$ 的走法有 1 種

由 $P\to C$ 的走法有 1 種

$$n(s) = 3+1+1 = 5$$

$\therefore$ 由 $P\to A$ 的機率 $=\dfrac{3}{5}$

由 $P\to B$ 的機率 $=\dfrac{1}{5}$

由 $P\to C$ 的機率 $=\dfrac{1}{5}$

同理，乙亦然（略）

故甲、乙二人在中途相遇的機率

$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}$$

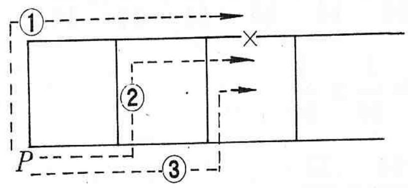
$$=\frac{7}{25}$$

解三：

甲：由 $P\to A$ 的機率

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=\frac{7}{2^3}$$

①　②　③



由 $P\to B$ 的機率 $=\dfrac{1}{2^4}$

由 $P\to C$ 的機率 $=\dfrac{1}{2^4}$

同理，

乙：由 $Q\to A$ 的機率 $=\dfrac{1}{2^4}$

由 $Q\to B$ 的機率 $=\dfrac{1}{2^4}$

由 $Q\to C$ 的機率 $=\dfrac{7}{2^3}$

故甲、乙兩人在中途相遇的機率

$$=\frac{7}{2^3}\times\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\times\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\times\frac{7}{2^3}$$

$= \underset{\sim\sim}{\dfrac{29}{2^8}}$

解四：〔樣本空間取在$P \to Q$上面〕

甲：由$P \to A \to Q$的機率

$= \dfrac{7}{2^3} \times 1 = \dfrac{7}{2^3}$

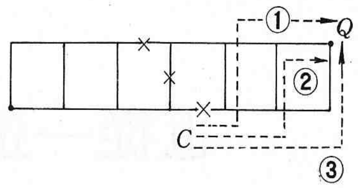
由$P \to B \to Q$的機率

$= \dfrac{1}{2^3} \times 1 = \dfrac{1}{2^4}$

由$P \to C \to Q$的機率

$= \dfrac{1}{2^4}\left(\underset{①}{\dfrac{1}{2}} + \underset{②}{\dfrac{1}{2^2}} + \underset{③}{\dfrac{1}{2^2}}\right) = \dfrac{1}{2^4}$

與（解三）同



所得的結果將與（解三）完全相同，故以下從略。

討論：按聯考試題的答案型式，似乎是（解三）或（解四）才對，但個人認爲（解一）與（解二）又何嘗不可（題意中並未指出甲、乙二人對街道是否熟悉），個人才淺學疏，或許有考慮不週到之處，尚請各位讀者及前輩指點迷津。

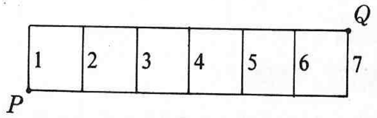
本刊編輯陳昭地回覆

洪先生：

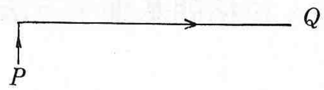
對於您所提出今年大學數學科自然組選擇題第（戊）題的問題，茲答覆如下：

1. 您所提出的另一問題跟此題的意思，表面上看來似乎有點兒類似，實質上是不相同。在您所提出的棋盤街問題的各種解法，也常是一般人，對本問題的解釋不同而常見到的解法。惟就本題來看，首先應該把由A到B依題意下之所有可能走的路線找出來，一共是 56 種，再依您解一的方法去處理，因此只有解一是正確的方法，其他的兩種都或多或少違反機率計算的原則。

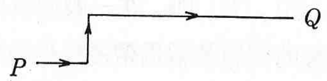
2. 您所提出的棋盤問題，每一種路線機率都是相等的；而本年的聯考題，由P到Q共有 7 條路線，如下圖



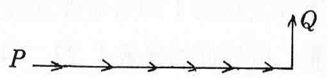
其中路線 1 表



路線 2 表



路線 7 表



而依題意各路線的機率不等，例如路線 1 之機率是$\dfrac{1}{2}$，路線 2 是$\dfrac{1}{4}$，…，路線 6 與 7 都是 $\dfrac{1}{64}$；因此，若用解一的方法，則表示各路線之機率一樣顯然不符，故應採用解三或解四的方法才算正確！

陳昭地　覆