矩陣的一些應用

鄭來發
李勝利

前 言

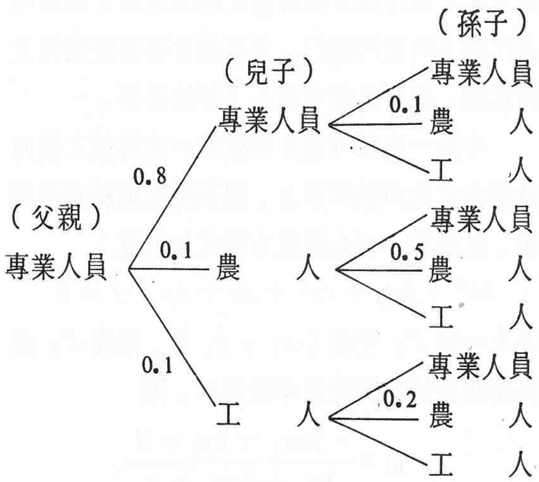
矩陣除了用以解一次方程組外，在其他方面的應用亦相當廣泛，今舉出三種說明於后：㈠有關機率問題的馬可夫鏈（A.A. Markov, 1856～1922，俄國人），㈡有關生產與消費的里昂提夫輸入輸出模式（W.W. Leontief, 1973 年諾貝爾經濟獎得主），㈢用以求廻歸直線方程式的最小差方法。

壹、馬可夫(A.A.Morkov)鏈

1.矩陣的呈現不只是在將一些數排成一陣列來做其基本運算而已，更重要的是它具有描述某些現象的功能，先看下面的例子：

根據某研究報告指出：兒童成人後之職業受他父親職業的影響甚大，其調查結果爲：專業人員的兒子是：「專業人員的機率爲0.8，是農人的機率爲0.1，是工人的機率爲0.1」；農人的兒子是：「專業人員的機率爲0.3，是農人的機率爲0.5，是工人的機率爲0.2」；工人的兒子是：「專業人員的機率爲0.2，是農人的機率爲0.2，是工人的機率爲0.6」，試問專業人員的孫子是農人的機率爲多少？

我們可以分成三個方向來討論：⑴專業人員的兒子是專業人員而專業人員的兒子是農人的機率爲 $0.8\times 0.1=0.08$；⑵專業人員的兒子是農人而農人的兒子是農人的機率爲 $0.1\times 0.5=0.05$；⑶專業人員的兒子是工人而工人的兒子是農人的機率爲 $0.1\times 0.2=0.02$，圖示如下：



因此專業人員的孫子是農人的機率爲 $0.08+0.05+0.02=0.15$，現在將上述的研究報告資料及所問之問題用矩陣表示如下：

父親的職業

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{專業人員} & \text{農人} & \text{工人}\end{array} \\ \text{兒童將來的職業}\ \begin{array}{c}\text{專業人員}\\ \text{農　人}\\ \text{工　人}\end{array} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} = A \end{array}$$

令 $A=[\,P_{ij}\,]_{3\times 3}$，其中 P_{ij} 表示：父親是第 j 種職業而其孩子成人後是第 i 種職業的比

例，由於P_{ij}爲一機率，故有$0 \leq P_{ij} \leq 1$，且$P_{1j}+P_{2j}+P_{3j}=1$，$j=1,2,3$。

欲求專業人員的孫子是農人的機率即爲求A^2之（2，1）元，即A（左矩陣）之第二列與A（右矩陣）之第一行對應元積之和：

$0.1 \times 0.8 + 0.5 \times 0.1 + 0.2 \times 0.1 = 0.15$

上述兒童成人後的職業決定於他父親職業的比率之矩陣A稱爲推移矩陣。如果想了解幾代以後兒童成人後的職業所佔的比率，我們可就A，A^2，A^3…加以觀察。

2.假設某地區有甲、乙、丙三種報紙，根據市場調查顯示：

(1)目前訂閱甲報者，次年有80％繼續訂閱甲報，有10％改訂乙報，有10％改訂丙報。

(2)目前訂閱乙報者，次年有20％改訂甲報，有70％繼續訂閱乙報，有10％改訂丙報。

(3)目前訂閱丙報者，次年有10％改訂甲報，有30％改訂乙報，有60％繼續訂閱丙報。

又今年訂閱甲報人數佔訂戶總數的20％，訂閱乙報的人數佔30％，訂閱丙報的人數佔50％，假設以後各年訂戶總數不變，且從任一年到次一年訂閱某報轉而訂閱他報或續訂的比例不變，試問一年後，二年後的市場佔有率各爲多少？又市場的佔有率是否會趨於穩定？此時各報的市場佔有率各爲多少？

一年後訂閱甲報者來自：(1)今年訂閱甲報，明年續訂閱甲報；(2)今年訂閱乙報，明年改訂甲報；(3)今年訂閱丙報，明年改訂甲報。

故一年後甲報的市場佔有率爲

$0.8 \times 0.2 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.5$
$= 0.27$

同理一年後乙報的市場佔有率爲

$0.1 \times 0.2 + 0.7 \times 0.3 + 0.3 \times 0.5$
$= 0.38$

一年後丙報的市場佔有率爲

$0.1 \times 0.2 + 0.1 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5$
$= 0.35$

現在我們將上面的訂報情況用矩陣表示如下：

假設以1，2，3分別表示甲，乙，丙三種報紙，並以P_{ij}表示在某一年訂閱j報，而次一年訂閱i報的機率，則從任一年到次一年訂閱某報轉而訂閱他報或續訂的比率可用推移矩陣A表示如下：

某年訂閱的報別

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} \end{array} \\ \text{次年訂閱的報別} \begin{array}{c} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} = A \end{array}$$

其中$0 \leq P_{ij} \leq 1$，且$P_{1j}+P_{2j}+P_{3j}=1$，$j=1,2,3$。

又設$P_j^{(k)}$表示第k年後j報的市場佔有率，$k=0$時表示今年的佔有率，$k=1$表示一年後的佔有率，$k=2$表示二年後的佔有率，……此時

$$P^{(k)} = \begin{pmatrix} P_1^{(k)} \\ P_2^{(k)} \\ P_3^{(k)} \end{pmatrix}$$

稱爲狀態向量，而$P^{(0)}$又稱爲初期狀態向量

一年後甲、乙、丙報的市場佔有率即爲推移矩陣A的第一、二、三列與初期狀態向量$P^{(0)}$對應元乘積之和，用矩陣乘法運算表示如下：

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_3^{(1)} \end{pmatrix} = AP^{(0)}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.27 \\ 0.38 \\ 0.35 \end{pmatrix}$$

同理可求得二年後各報的市場佔有率爲：

$$P^{(2)}=\begin{bmatrix}P_1^{(2)}\\P_2^{(2)}\\P_3^{(2)}\end{bmatrix}=AP^{(1)}$$

$$=\begin{bmatrix}0.8&0.2&0.1\\0.1&0.7&0.3\\0.1&0.1&0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.27\\0.38\\0.35\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.327\\0.398\\0.275\end{bmatrix}$$

由上列推出 k 年後各報的市場佔有率：

$$P^{(1)}=AP^{(0)}$$
$$P^{(2)}=AP^{(1)}=AAP^{(0)}=A^2P^{(0)}$$
$$P^{(3)}=AP^{(2)}=AA^2P^{(0)}=A^3P^{(0)}$$
$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$
$$P^{(k)}=A^kP^{(0)}$$

利用電算器可算得

$$P^{(13)}=\begin{bmatrix}0.449318\cdots\cdots\\0.350645\cdots\cdots\\0.200036\cdots\cdots\end{bmatrix}$$

$$P^{(14)}=\begin{bmatrix}0.449587\cdots\cdots\\0.350394\cdots\cdots\\0.200018\cdots\cdots\end{bmatrix}$$

$$P^{(15)}=\begin{bmatrix}0.449750\cdots\cdots\\0.350240\cdots\cdots\\0.200009\cdots\cdots\end{bmatrix}$$

$$P^{(16)}=\begin{bmatrix}0.449849\cdots\cdots\\0.350146\cdots\cdots\\0.200004\cdots\cdots\end{bmatrix}$$

因此可以說 14 ，15 年後就“幾乎”到達穩定狀態了。假設到達穩定狀態時，各報的市場佔有率爲

$$P=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\quad x+y+z=1$$

則 $AP=P$

即 $\begin{bmatrix}0.8&0.2&0.1\\0.1&0.7&0.3\\0.1&0.1&0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

解之得 $x=\frac{9}{4}t$ ，$y=\frac{7}{4}t$ ，$z=t$

但 $x+y+z=1$ 故得 $x=\frac{9}{20}$ ，

$y=\frac{7}{20}$ ，$z=\frac{1}{5}$

即到達穩定狀態時甲、乙、丙三報的市場佔有率分別爲 $\frac{9}{20}$ ，$\frac{7}{20}$ ，$\frac{1}{5}$。

在社會現象與自然現象中，許多現象都會隨時間的改變而呈現不同的狀態，而且任一時期都恰好呈現其中之一種狀態，前面所學的兩個問題就是這一個例子。

假如我們每隔一段固定的時間，對某些事情作觀察，將會發現許多事情會從某一種狀態轉變成另一種狀態，我們往往在已經知道這類事件從前或以前的狀態，轉而想預測下一觀察期，該事件所呈現的狀態，乃至在以後某一觀察期，該事件可能呈現的狀態。

若是在某一特定的觀察期，一事件呈現某一狀態的機率，可由該事件在此觀察期的前一觀察期所呈現的狀態決定，像這樣的過程就叫做馬可夫鏈（Markov Chains）

貳、里昂提夫(Wassily Leontief)輸入輸出模式

1.設有甲、乙、丙三家工廠分別生產一種產品，假設三種產品都只供三家工廠自給自足，其供需情形如下：

(1)甲廠的產品中，$\frac{1}{3}$留供本身使用，$\frac{1}{3}$供給乙廠，$\frac{1}{3}$供給丙廠。

(2)乙廠的產品中，$\frac{2}{5}$供給甲廠，$\frac{1}{5}$留供本身使用，$\frac{2}{5}$供給丙廠。

(3)丙廠的產品中，$\frac{1}{4}$供給甲廠，$\frac{1}{4}$供給乙廠，$\frac{1}{2}$留供本身使用。

假設三種產品的單位價格相同，問三家工廠應分別生產多少單位的產品才能使產銷平衡？

設甲、乙、丙三廠需分別生產產品 x_1，x_2，x_3 單位，其中 x_1，x_2，x_3 必須大於或等於0。

就甲廠而言，若需生產 x_1 單位的產品，則甲廠需提供$\frac{1}{3}x_1$ 的甲產品給甲廠本身，乙廠需提供 $\frac{2}{5}x_2$ 的乙產品給甲廠，丙廠亦需提供 $\frac{1}{4}x_3$ 的丙產品給甲廠，由於需求恰好與供給相等，即產銷平衡，故得

$$x_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{4}x_3$$

同理就乙廠而言為

$$x_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{4}x_3$$

就丙廠而言為

$$x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

從上面三條方程式可得一次方程組如下：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \quad \cdots \quad (L) \\ x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x_1 = 6t \\ x_2 = 5t \qquad t \text{ 為正實數} \\ x_3 = 8t \end{cases}$$

因此只要甲、乙、丙三廠的生產量之比為6：5：8，則它們的經濟行為就可達到平衡狀態，即無人賺錢，也無人賠錢。

現在將上面的敍述用矩陣表示出來，則可令

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A中之元用 a_{ij} 表示，$i = 1, 2, 3$，$j = 1, 2, 3$

若以1，2，3分別代表甲、乙、丙廠，則 a_{ij} 表示由 j 廠生產的產品而被 i 廠消耗掉的比例（j 廠產量的比率），故有 $0 \leq a_{ij} \leq 1$，則 $a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} = 1$，$j = 1, 2, 3$

令 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$　$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

則一次方程組（L）可表為

$$X = AX \quad \text{或} \quad (A - I_3)X = 0$$

其中A稱為輸入輸出矩陣（a_{ij} 稱為輸入係數），X稱為生產矩陣或輸出矩陣。

像上面這種形式的生產消費問題稱為里昂提夫輸入輸出模式，又上例中全部生產的產品都被參與生產者所消耗，此種模式稱之為**封閉式**。

在封閉式的經濟模式中，$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 為其一組顯然解，然而這組解在經濟上毫無意義，因為它表示所有生產機構都停止生產，因此，在封閉式的經濟模式中，所要尋求的解是非顯然解，同時也不能出現負數。

2. 生產機構全部的產品，如果一部分消耗於生產者本身，一部分為外來的所消費，則這產銷的經濟行為稱之為**開放式**，今舉例如下：

設有甲、乙、丙三家工廠分別生產一種產品，假設甲廠生產的產品一部分供這三家工廠使用，一部分供其他消費者使用，乙廠及丙廠的產品也像這樣的支配，其供需情形如下：

(1)甲廠180萬元的產品中，其中供甲、乙、丙三廠使用的分別為50萬，20萬與

40 萬，剩下的供給其他消費者使用。

(2)乙廠 160 萬元的產品中，其中供甲、乙、丙三廠使用的分別爲 20 萬，30 萬與 20 萬，剩下的供給其他消費者使用。

(3)丙廠 120 萬元的產品中，其中供甲、乙、丙三廠使用的分別爲 30 萬，20 萬與 20 萬，剩下的供給其他消費者使用。

如果市場調查預測在下一期其他消費者需要甲、乙與丙三廠產品的金額分別爲 60 萬，110 萬與 60 萬，問這三家工廠應如何生產，才能使三種產品的產銷平衡？

根據上述甲、乙、丙三家工廠產銷的情形可知：甲廠生產 180 萬產品中，需要甲廠本身產品 50 萬，乙廠產品 20 萬與丙廠產品 30 萬，亦即甲廠要生產 1 萬元的產品，需要甲、乙、丙三廠之產品分別爲 $\frac{50}{180}=\frac{5}{18}$ 萬，$\frac{20}{180}=\frac{1}{9}$萬與 $\frac{30}{180}=\frac{1}{6}$萬。

同理生產 1 萬元的乙廠產品，需要甲、乙、丙三廠之產品分別爲 $\frac{20}{160}=\frac{1}{8}$萬，$\frac{30}{160}=\frac{3}{16}$ 萬與 $\frac{20}{160}=\frac{1}{8}$萬。

又生產 1 萬元的丙廠產品，需要甲、乙、丙三廠之產品分別爲 $\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$萬，$\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$萬與 $\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$萬。

由此我們得下面的輸入輸出矩陣：

$$A=\begin{bmatrix}\frac{5}{18} & \frac{1}{8} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{9} & \frac{3}{16} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

A之元素用 a_{ij} 表示

$(i, j=1, 2, 3)$

若以 1，2，3 分別代表甲、乙、丙廠，則 a_{ij} 表示 j 廠的產品用在 i 廠的比例，故 $0\leq a_{ij}\leq 1$。

令生產矩陣 $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

其中 x_1, x_2, x_3 分別表示甲、乙、與丙三廠所需的產量金額且 $x_i\geq 0$ $(i=1, 2, 3)$

又由題意知在下一期，其他的消費者需要甲、乙與丙三廠產品的金額分別爲60萬，110 萬與 60 萬。

令 $D=\begin{bmatrix}60\\110\\60\end{bmatrix}$ 稱爲需求矩陣

由於輸入恰好等於輸出，故有

$$\begin{cases}x_1=\frac{5}{18}x_1+\frac{1}{8}x_2+\frac{1}{3}x_3+60\\ x_2=\frac{1}{9}x_1+\frac{3}{16}x_2+\frac{1}{6}x_3+110\\ x_3=\frac{1}{6}x_1+\frac{1}{8}x_2+\frac{1}{6}x_3+60\end{cases}$$

亦即 $X=AX+D$，

或 $(I_3-A)X=D$ …………(*)

解之得

$$\begin{cases}x_1=\frac{126000}{707}\\ x_2=\frac{132640}{707}\\ x_3=\frac{96000}{707}\end{cases}$$

討論里昂提夫輸入輸出模式的問題主要在於：當生產機構相互間的供需關係已知時，是不是對外來消費者的任何需求，都可由這些生產機構達成任務？

如果把這個主題用數學式子表示出來，就變成了：

(*) 式中，I_3-A之乘法反元素是否存在？

若存在，則$X=(I_3-A)^{-1}D$，式中

$(I_3 - A)^{-1}$ 之每一個元素均需大於或等於 0，然而這個性質並非一定成立，例如二階時

設
$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

則
$$I_2 - A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

因 $I_2 - A$ 之行列式值為 0，故 $(I_2 - A)^{-1}$ 不存在，換句話說，這兩個生產機構無法達成任務。

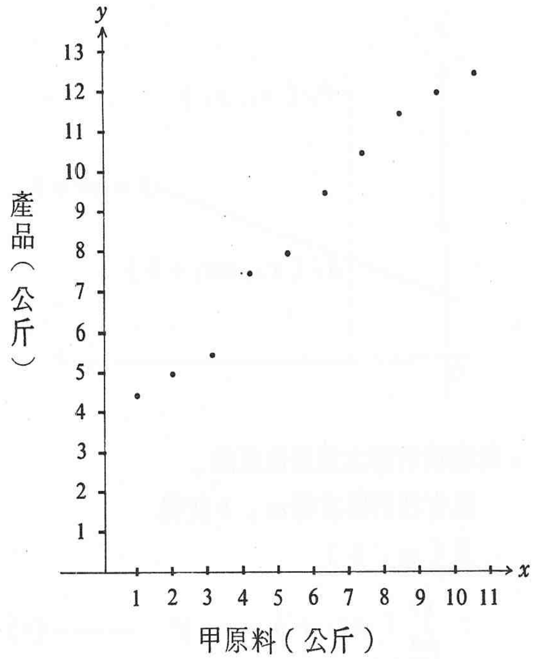
叁、最小差方法求迴歸直線

收集資料與整理資料是日常活動中經常可遇到的事情，我們往往根據某些給定的 x 值，測度其所對應的 y 值，並將這些數對 (x, y) 繪在坐標圖形上，再依這些點尋找數 x 與 y 之間的關係。然後，我們便可從給定的 x 值找 y 值，或從 y 值找 x 值。

例如某工廠在製造某產品時，所使用的甲原料及產品之量記錄如下：

甲原料 x（公斤）	產　量　y（公斤）
1	4.3
2	4.8
3	5.7
4	7.3
5	7.8
6	9.5
7	10.2
8	11.6
9	12
10	12.4

根據上表將其散佈圖描繪如下：

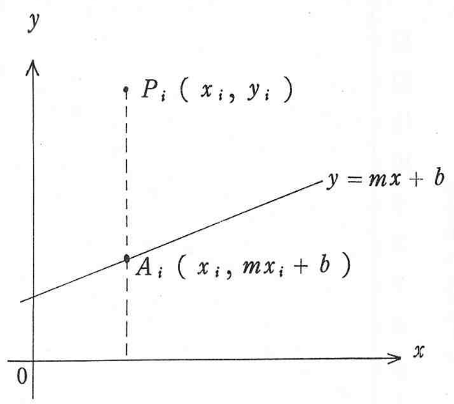


從表格中的數據，我們可以找到一個多項函數 $g(x)$，滿足 $g(x) = y$，其中 (x, y) 為表中之對應值，然而 x 的值愈多，則所求的多項函數之次數也愈高；另一方面我們發現散佈圖中之點幾乎散佈在一直線的兩側，因此我們退而求其次，另找一個計算簡便的線型函數 $f(x)$，使每一個 $f(x)$ 儘量接近 y 值，下面我們將利用最小差方法來尋找這一線型函數。

設 (x_1, y_1)，$(x_2, y_2) \cdots$，(x_n, y_n) 為給定之數對，我們將求出一線型函數 $f(x) = mx + b$，使得誤差的平方和

$$\begin{aligned} E &= (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + \cdots \\ &\quad + (f(x_n) - y_n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (mx_i + b - y_i)^2 \text{ 為最小} \end{aligned}$$

就幾何意義來說，我們把 (x_1, y_1)，$(x_2, y_2) \cdots (x_n, y_n)$ 看成是坐標平面上的點，然後找出一條直線 $y = mx + b$ 使得由各點 (x_i, y_i) 至此直線的 x 軸垂直方向之距離平方和為最小，亦即下圖中 $(\overline{P_iA_i})^2$ 之和為最小，此直線在統計學中稱之為**迴歸直線**



，此處我們稱之爲最佳直線。

現在我們將求得m，b使得

$$E(m, b) = \sum_{i=1}^{n} (mx_i + b - y_i)^2 \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

爲最小，　x_i，y_i爲已知數。

將(*)式之m看成常數，則(*)變成b之函數，當(*)式有極小值時，對b之一次導函數之值爲0，因此可得

$$\sum_{i=1}^{n} 2(mx_i + b - y_i) = 0$$

或 $$\sum_{i=1}^{n} (mx_i + b - y_i) = 0$$

同理將(*)式之b看成常數，則有

$$\sum_{i=1}^{n} 2(mx_i + b - y_i)\,x_i = 0$$

或 $$\sum_{i=1}^{n} x_i(mx_i + b - y_i) = 0$$

此時我們得一聯立方程式

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (mx_i + b - y_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i(mx_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} nb + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) m = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) m = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

令 $$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

則上述聯立方程式可用矩陣表示如下：

$$A^t AX = A^t Y$$

此處 A^t 爲A之轉置矩陣

即 $$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots\cdots & x_n \end{pmatrix}$$

現在我們再看前例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 4.3 \\ 4.8 \\ 5.7 \\ 7.3 \\ 7.8 \\ 9.5 \\ 10.2 \\ 11.6 \\ 12 \\ 12.4 \end{pmatrix}$$

則 $$A^t A = \begin{pmatrix} 10 & 55 \\ 55 & 385 \end{pmatrix} \quad A^t Y = \begin{pmatrix} 85.6 \\ 552.4 \end{pmatrix}$$

故得 $$\begin{pmatrix} 10 & 55 \\ 55 & 385 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85.6 \\ 552.4 \end{pmatrix}$$

解之得　$m = 0.989$　$b = 3.12$

因此所求之最佳直線爲

$$y = 0.989x + 3.12$$