上期徵答問題

優勝名單：

9101 優勝名單

特優：林建宏（台北工專）

優良：陶堅強（輔大數學）

良好：胡豐榮（台中師專）

左漢榮（台中師專）

吳建華

9102 優勝名單

特優：蔡岱朋（建國中學）

優良：陳力華（成功大學）

問題詳解：

9101 再論“計算極限值”解答（林建宏）

令 $$h(\mathrm{a},\varepsilon)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{i}(n+\mathrm{a})}\right]^{1+\varepsilon}$$

此處 $\varepsilon>0$，$0<\mathrm{a}<1$。由於

$$|h(\mathrm{a},\varepsilon)|$$

$$\leqq\left|\frac{1}{\mathrm{a}}\right|^{1+\varepsilon}+\left|\frac{1}{1-\mathrm{a}}\right|^{1+\varepsilon}+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n+\mathrm{a}}\right|^{1+\varepsilon}$$

$$+\sum_{n=-2}^{-\infty}\left|\frac{1}{n+\mathrm{a}}\right|^{1+\varepsilon}$$

$$\leqq\left|\frac{1}{\mathrm{a}}\right|^{1+\varepsilon}+\left|\frac{1}{1-\mathrm{a}}\right|^{1+\varepsilon}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}<\infty$$

所以 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{i(n+\mathrm{a})}\right]^{1+\varepsilon}$ 爲絕對收斂，故次序可以調整。若以 Σ' 代表 n 由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 取總和且不包含 $n=0$ 這一項，則

$$h(\mathrm{a},\varepsilon)$$

$$=\left(\frac{1}{i\mathrm{a}}\right)^{1+\varepsilon}+\Sigma'\,\frac{1}{i(n+\mathrm{a})}^{1+\varepsilon}$$

$$=\left(\frac{1}{i\mathrm{a}}\right)^{1+\varepsilon}+e^{-\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)i}\,\Sigma'\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\varepsilon}\left(1+\frac{\mathrm{a}}{n}\right)^{-1-\varepsilon}$$

$$=\left(\frac{1}{i\mathrm{a}}\right)^{1+\varepsilon}+e^{-\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)i}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\varepsilon}\left(1+\frac{\mathrm{a}}{n}\right)^{-1-\varepsilon}\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{n}\right)^{1+\varepsilon}\left(1-\frac{\mathrm{a}}{n}\right)^{-1-\varepsilon}\right]$$

因 $0<\frac{\mathrm{a}}{n}<1$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$，故由二項式定理得

$$h(\mathrm{a},\varepsilon)$$

$$=\left(\frac{1}{i\mathrm{a}}\right)^{1+\varepsilon}+e^{-\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)i}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\varepsilon}\left[1+\right.\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-k-\varepsilon)\cdots(-1-\varepsilon)}{k!}\left(\frac{\mathrm{a}}{n}\right)^{k}\right]+\left(-\frac{1}{n}\right)^{1+\varepsilon}\left[1+\right.$$

$$\left.\left.\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-k-\varepsilon)\cdots(-1-\varepsilon)}{k!}\left(-\frac{\mathrm{a}}{n}\right)^{k}\right]\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{i\mathrm{a}}\right)^{1+\varepsilon}-2\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{1+\varepsilon}+e^{-\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)i}\left(\frac{1}{\mathrm{a}}\right)^{1+\varepsilon}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-k-\varepsilon)\cdots(-1-\varepsilon)}{k!}$$

$$\left(\frac{\mathrm{a}}{n}\right)^{1+k+\varepsilon}\left[1+e^{\pi i(1+k+\varepsilon)}\right]$$

考慮不等式

$$\int_{n+1}^{n+2}\frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}\leqslant\frac{1}{(n+1)^{1+\varepsilon}}\leqslant\int_{n}^{n+1}\frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}$$

$$n=1,2,3,\cdots,N$$

現將上式取總和，得

$$\int_{2}^{N+2}\frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}\leq\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\leq\int_{1}^{N+1}\frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}$$

$$N=1,2,3\cdots\cdots$$

簡單的計算給出

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2^{\varepsilon}}-\frac{1}{(N+2)^{\varepsilon}}+\varepsilon\right]\leq\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon}\left[1-\frac{1}{(N+1)^{\varepsilon}}+\varepsilon\right]$$

接著，我們將 $\sin(\frac{\pi\varepsilon}{2})$遍乘此不等式，並令 $N\to\infty$，則可得到下列式子

$$\frac{\sin(\frac{\pi\varepsilon}{2})}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2^{\varepsilon}}+\varepsilon\right)\leq\sin(\frac{\pi\varepsilon}{2})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

$$\leq\frac{\sin(\frac{\pi\varepsilon}{2})}{\varepsilon}(1+\varepsilon)$$

很明顯地，當 $\varepsilon\to 0$ 時，

$$\sin(\frac{\pi\varepsilon}{2})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\to\frac{\pi}{2}$$

由於

$$\lim_{\varepsilon\to 0}1+e^{\pi i(1+k+\varepsilon)}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}1+\cos(1+k+\varepsilon)\pi+i\sin(1+k+\varepsilon)\pi$$

$$=1+\cos(k+1)\pi$$

$$=2\cos^2(\frac{k+1}{2})\pi$$

$$=\begin{cases}2 & \text{若 } k \text{ 是奇數}\\ 0 & \text{若 } k \text{ 是偶數}\end{cases}$$

故知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}h(a,\varepsilon)=-\pi+\frac{1}{ia}-\frac{2}{ia}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{a}{n})^{2k}$$

$$=-\pi+\frac{1}{ia}-\frac{2}{ia}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{a}{n})^2}{1-(\frac{a}{n})^2}$$

$$=-\pi-i\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2-n^2}\right)$$

如欲化簡此結果，我們可先求 $f(x)=\cos xa$ 於區間〔$-\pi$，π〕的Fourier 級數，由於這個Fourier 級數收斂到 $f(x)$ 本身，經過直接計算給出

$$\cos xa$$

$$=\frac{1}{\pi}\sin\pi a\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a(-1)^n\cos nx}{a^2-n^2}\right]$$

再者，於上式中，令 $x=\pi$，即得

$$\pi\cot\pi a=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2-n^2}$$

因此，我們最後得出的極限值是

$$-\pi-i\pi\cot\pi a$$

9102 關於SDR解答（蔡岱明提供）

(1)由題目本身定義，只要下列條件符合即成立SDR：

(1) $\forall a_i\in A_i$，$1\leq A\leq n$，且 $|A_i|=i+1$

(2) $\forall a_i$ 均相異

直接討論之：A_1 有 2 個元素，故有 2 種選擇方式

A_2 有 3 個元素，最多有一個元素為a_1，故至少有 2 種選擇方式

⋮ ⋮

⋮ ⋮

A_i 有 $i+1$ 個元素，最多有$i-1$ 個元素已使用過，故至少有 2 種選擇方式

⋮ ⋮

⋮ ⋮

共選擇 n 次，故至少有2^n種可能。（至多有（$n+1$）！種）即有2^n種以上的SDR。

(2)在前面的討論中，知任何一個 $A_{i-1}\not\subset A_i$ 時，即應該有 2 種以上的選擇方式，而不影響其他次的選擇。

故知其充要條件：

$$\forall A_{i-1}\subset A_i\ (i=2,3,\cdots\cdots,n)。$$